"Qo'shma operatorlar" mavzusini o'qitishda "bumerang" texnologiyasining afzalliklari va ilmiy-uslubiy asoslari

Farangis Jo'raqulova
Buxoro davlat universiteti

Annotatsiya: Maqolada oliy ta'limda funksional analiz kursining "Qo'shma operatorlar" mavzusini "Bumerang" interfaol texnologiyasi asosida o'qitishning ilmiy-uslubiy modeli ishlab chiqilgan. Hilbert fazosidagi qo'shma operatorning ta'rifi, Ris tasvirlash teoremasidan kelib chiqadigan mavjudlik va yagonalik, normaning saqlanishi, operatorlar ko'paytmasi uchun qo'shmalash tartibining almashishi hamda o'z-o'ziga qo'shma operatorlarga doir xossalar qat'iy dalillar bilan bayon etilgan. To'rtta ekspert moduliga ajratilgan o'quv materiallari, bosqichli o'zaro o'qitish, yechimli matematik topshiriqlar, kross-nazorat va mezonli baholash vositalari tavsiya qilinadi. Ish metodik loyiha xarakterida bo'lib, empirik tajriba natijalari da'vo qilinmaydi; model samaradorligini kelgusida tekshirish tartibi taklif etiladi.

Kalit so'zlar: qo'shma operator, Hilbert fazosi, Ris teoremasi, operator normasi, o'z-o'ziga qo'shma operator, Bumerang texnologiyasi, ekspert guruhi, tengdoshlararo o'qitish

Advantages and Scientific-Methodological Foundations of the "Boomerang" Technique in Teaching the Topic of "Compound Operators"

Farangis Jurakulova
Bukhara State University

Abstract: This paper develops an instructional framework for teaching adjoint operators in an undergraduate functional analysis course through the interactive "Boomerang" approach. It gives rigorous explanations of the adjoint operator on a Hilbert space, existence and uniqueness via the Riesz representation theorem, preservation of the operator norm, reversal of the order of products under taking adjoints, and elementary properties of self-adjoint operators. A four-module expert-group design is combined with worked mathematical problems, peer explanation, cross-questioning, and criterion-based assessment. The paper presents a methodological design and a plan for future evaluation rather than reporting unverified experimental gains.

(cc) BY

Keywords: adjoint operator, Hilbert space, Riesz representation theorem, operator norm, self-adjoint operator, Boomerang approach, expert group, peer learning

KIRISH

Funksional analiz zamonaviy matematika, xususan, integral tenglamalar, differensial operatorlar, spektral nazariya va matematik fizikaning asosiy tushunchalarini birlashtiradi. Mazkur fanda chiziqli operatorni o‘rganish faqat uning ta’sirini hisoblash bilan cheklanmaydi: operatorning normasi, qo‘shmasi, invariant qismfazolari va spektral xossalari ham tahlil qilinadi. “Qo‘shma operatorlar” mavzusi keyinchalik o‘z-o‘ziga qo‘shma, unitar va normal operatorlarni o‘rganish uchun zarur poydevorni shakllantiradi [1, 2].

Talabalar uchun qiyinchilik operator ta’rifining mavhumligida emas, balki turli matematik tasvirlarni birlashtirishdadir. Chekli o‘lchamli fazoda matritsaning qo‘shma transponirlanishini bajarish oson ko‘rinadi, biroq umumiy Hilbert fazosida qo‘shma operatorning mavjudligi va yagonaligi nega kafolatlanishi, kompleks holatda skalyar ko‘paytma qanday konvensiyaga bo‘ysunishi hamda $\| A^* \| = \| A \|$ kabi tengliklarning mazmuni alohida izoh talab qiladi. Bundan tashqari, $(AB)^* = B^*A^*$ formulasi operatorlar ko‘paytmasi kommutativ emasligini eslatadi.

Yuborilgan tezisning asosiy g‘oyasi - “Bumerang” texnologiyasida talabalarni kichik guruhlarga ajratish, bir mavzu bo‘yicha ekspert sifatida tayyorlash va o‘rganganlarini dastlabki guruhiga qaytib tushuntirishdir. Mazkur maqolada shu yondashuvning matematik mazmuni, qo‘llash ketma-ketligi va diagnostik imkoniyatlari kengaytiriladi. O‘zaro o‘qitishning metodik mexanizmlari kooperativ o‘qitish va *jigsaw* yondashuviga yaqin bo‘lsa-da [3], “Bumerang” aynan funksional analiz mavzusiga mos mustaqil didaktik ishlanma sifatida talqin qilinadi.

Tadqiqot maqsadi - qo‘shma operatorlarni o‘qitishda to‘rt ekspert modulidan iborat “Bumerang” modelini yaratish, nazariy va amaliy topshiriqlarni izchil taqsimlash hamda tushuncha, isbot va hisoblashni tekshiradigan baholash mezonlarini asoslash. Tadqiqot obyekti - oliy ta’limda funksional analizni o‘qitish jarayoni; predmeti - qo‘shma operatorlar mavzusida o‘zaro o‘qitish, qayta aloqa va matematik dalillashni tashkil etish usullari.

Maqolaning metodik yangiligi to‘rtta o‘zaro bog‘liq komponentdan iborat: birinchidan, matematik natijalar isbotlarning mantiqiy bo‘g‘inlariga ajratiladi; ikkinchidan, har bir talaba ayrim bo‘g‘inning eksperti sifatida javobgar bo‘ladi; uchinchidan, qayta o‘qitish jarayonida hamma to‘rtta bo‘g‘in yagona bilimga birlashtiriladi; to‘rtinchidan, kross-savollar yordamida talabaning faqat o‘z modulini emas, boshqalarnikini ham tushunishi tekshiriladi.

1. MAVZUNING MATEMATIK-NAZARIY ASOSLARI

1.1. Hilbert fazosi va qo‘shma operator ta’rifi

H kompleks Hilbert fazosi, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ uning skalyar ko‘paytmasi bo‘lsin. Ushbu maqolada skalyar ko‘paytma birinchi argument bo‘yicha chiziqli, ikkinchi argument bo‘yicha kompleks qo‘shma chiziqli deb olinadi. Demak,

$$\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle, \qquad \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}.$$

Haqiqiy Hilbert fazosida kompleks qo‘shmalash amali oddiy tenglikka aylanadi. $\mathcal{B}(H)$ orqali H fazodagi barcha chegaralangan chiziqli operatorlar to‘plami belgilanadi. $A \in \mathcal{B}(H)$ bo‘lsin.

Ta’rif. Har qanday $x, y \in H$ uchun

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $A^* \in \mathcal{B}(H)$ operator A ga qo‘shma operator deyiladi. Bu ta’rifdan skalyar ko‘paytmaning tanlangan chiziqlilik konvensiyasi barcha keyingi isbotlarda bir xil saqlanishi zarurligi ko‘rinadi.

1-teorema (mavjudlik va yagonalik). Har bir $A \in \mathcal{B}(H)$ uchun yagona $A^* \in \mathcal{B}(H)$ mavjud.

Isbot. Har bir belgilangan $y \in H$ uchun $f_y : H \to \mathbb{C}$ funksionalni $f_y(x) = \langle Ax, y\rangle$ orqali aniqlaymiz. A ning chiziqliligidan f_y ham chiziqli, Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan esa

$$\left|f_y(x)\right| \le \| Ax \| \, \| y \| \le \| A \| \, \| x \| \, \| y \|$$

kelib chiqadi. Shunday qilib, f_y chegaralangan. Hilbert fazosi uchun Ris tasvirlash teoremasiga ko‘ra, yagona $z_y \in H$ topilib, $f_y(x) = \langle x, z_y\rangle$ tenglik barcha $x \in H$ uchun bajariladi. Endi $A^* y = z_y$ deb olamiz. Birinchi argument bo‘yicha chiziqlilik va Ris tasvirining yagonaligidan A^* ning y bo‘yicha chiziqliligi kelib chiqadi. Yana bir marta dual norma formulasini qo‘llasak,

$$\| A^* y \| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, A^* y\rangle| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, y\rangle| \le \| A \| \, \| y \|.$$

Demak, A^* chegaralangan va $\| A^* \| \le \| A \|$. Agar boshqa B ham shu ayniyatni qanoatlantirsa, $\langle x, (A^* - B)y\rangle = 0$ barcha x, y uchun o‘rinli bo‘ladi. Xususan, $x = (A^* - B)y$ olinsa, $(A^* - B)y = 0$, ya’ni $A^* = B$. Teorema isbotlandi.

Didaktik izoh. Isbotni uch mantiqiy bo‘g‘inga ajratish qulay: (i) f_y ning chegaralangan chiziqli funksional ekanligini ko‘rsatish; (ii) Ris teoremasini qo‘llash; (iii) topilgan akslantirishning chiziqliligi, chegaralanganligi va yagonaligini isbotlash. Talabalar aynan shu bo‘g‘inlarni navbat bilan og‘zaki himoya qilishi mumkin.

1.2. Qo‘shma operatorning algebraik xossalari

$A, B \in \mathcal{B}(H)$ va $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ bo‘lsin. Quyidagi formulalar o‘rinli:

$$(A + B)^* = A^* + B^*, \qquad (\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*;$$
$$(AB)^* = B^* A^*, \qquad (A^*)^* = A.$$

(cc) BY

Birinchi tenglikni isbotlash uchun $\langle (A+B)x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle + \langle Bx, y\rangle = \langle x, (A^* + B^*)y\rangle$ deb yoziladi. Kompleks skalyar ko‘paytuvchiga oid formulada qo‘shma sonning paydo bo‘lishi ikkinchi argumentning qo‘shma chiziqliligidan kelib chiqadi. Ko‘paytma uchun

$$\langle ABx, y\rangle = \langle Bx, A^*y\rangle = \langle x, B^*A^*y\rangle$$

bo‘lganidan $(AB)^* = B^*A^*$ natijaga erishiladi. Xuddi shunday, $\langle A^*x, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ tenglikdan $(A^*)^* = A$ olinadi.

2-teorema (norma tengligi). Har qanday chegaralangan A uchun

$$\| A^* \| = \| A \|, \qquad \| A^*A \| = \| A \|^2.$$

Isbot. 1-teorema isbotida $\| A^* \| \le \| A \|$ olingan edi. A o‘rniga A^* qo‘yib, $(A^*)^* = A$ dan $\| A \| \le \| A^* \|$ kelib chiqadi. Demak, birinchi tenglik o‘rinli. Submultiplikativlikka ko‘ra, $\| A^*A \| \le \| A^* \| \| A \| = \| A \|^2$. Boshqa tomondan, $\| x \| = 1$ bo‘lganda

$$\| Ax \|^2 = \langle A^*Ax, x\rangle \le \| A^*A \|.$$

Birlik sfera bo‘yicha supremum olib, teskari tengsizlik hosil qilamiz. Natijada $\| A^*A \| = \| A \|^2$ isbotlanadi.

Metodik ogohlantirish. $\| A^*A \| = \| A \|^2$ har doim bajariladi, lekin $A^*A = A^2$ umumiy holda noto‘g‘ri. Talaba normaga oid tenglikni operatorlar orasidagi tenglik deb talqin qilmasligi kerak.

1.3. O‘z-o‘ziga qo‘shma va unitar operatorlar

Agar $A = A^*$ bo‘lsa, A o‘z-o‘ziga qo‘shma operator deyiladi. Bu holda $\langle Ax, x\rangle$ haqiqiy son: chunki $\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle}$. Bundan keyingi spektral tahlil uchun muhim boshlang‘ich natija olinadi. Agar $U^*U = UU^* = I$ bo‘lsa, U unitar operator deyiladi va $\| Ux \| = \| x \|$ bajariladi. Shu tariqa qo‘shma operator tushunchasi geometrik izometriya bilan bog‘lanadi.

Talabalar normal operator ta’rifini ham farqlashi lozim: $A^*A = AA^*$ bo‘lsa, A normal deyiladi. Har bir o‘z-o‘ziga qo‘shma va har bir unitar operator normal, biroq har qanday chegaralangan operator normal bo‘lavermaydi. Cheksiz o‘lchamli fazodagi siljitish operatori bunga keyingi bo‘limda qarshi misol sifatida keltiriladi.

2. “BUMERANG” TEXNOLOGIYASINING DIDAKTIK ASOSLARI

“Bumerang” texnologiyasining markazida o‘rganish - tushuntirish - qayta tekshirish sikli turadi. Dastlab talaba materialning cheklangan qismini izlanib o‘rganadi; so‘ng mutaxassislar guruhida bu qismni hamkasblari bilan tekshiradi; uchinchi bosqichda boshlang‘ich jamoaga qaytib, uni boshqalarga o‘rgatadi. Natijada bitta mavzuni alohida bo‘laklarga ajratish uni parchalashga emas, yakunda umumlashtirishga xizmat qiladi.

Tengdoshlarga tushuntirish faqat ma’lumotni takrorlash emas: masalan, $(AB)^*$ formulasini o‘rgatayotgan talaba natijaning nima uchun A^*B^* emasligini izohlashi,

(cc) BY

noma'lum operatorlar uchun skalyar ko'paytma orqali isbot ko'rsatishi kerak. Bu jarayonda o'qituvchi tayyor javobni beradigan yagona manba emas, balki isbotlar to'g'riligini nazorat qiluvchi fasilitator vazifasini bajaradi. O'zaro ta'lim usullari faol o'rganish haqidagi kengroq pedagogik tadqiqotlar bilan metodologik jihatdan hamohang [3-7]; biroq ular aynan mazkur darsning tajribaviy samaradorligini o'z-o'zidan tasdiqlamaydi.

Metodning asosiy didaktik prinsiplari: tarkibiy qismlarning bir-biriga bog'liqligi; individual javobgarlik; matematik dalilga tayangan og'zaki nutq; o'zaro tekshirish; bilimdagi bo'shliqlarni darhol aniqlash. Kuchli talabalar murakkab isbotlarni ishlab chiqishga, tayanch tushunchalarni puxta anglamagan talabalar esa ko'makchi savollar orqali mazkur jarayonga qo'shilishga yo'naltiriladi.

O'quv materialini ekspert modullarga ajratishda ularning mazmunan mustaqil o'rganilishi, ammo yakuniy matematik natijaga birgalikda olib kelishi talab etiladi. Shu sababli dastlabki ikki modul ta'rif, mavjudlik va algebraik xossalarga; keyingi ikki modul esa konkret hisoblash va cheksiz o'lchamli misollarga bag'ishlanadi. Bunday taqsimot abstrakt nazariya bilan amaliy ifodalar o'rtasida tabiiy ko'prik yaratadi.

3. TO'RTTA EKSPERT MODULI VA BOSQICHLI TOPSHIRIQLAR

3.1. Birinchi modul: ta'rif va Ris teoremasi

Ekspert vazifasi. Qo'shma operatorning ta'rifini tushuntirish, $f_y(x) = \langle Ax, y\rangle$ funksional uchun chegaralanganlik bahosini chiqarish, Ris teoremasidan foydalanib A^* mavjudligi va yagonaligini asoslash. Mazkur guruh isbotning to'liq yo'l xaritasini emas, uchta zarur mantiqiy pog'onasini alohida kartochkalarda yozadi.

1-topshiriq. $H = \mathbb{C}^2$ Evklid skalyar ko'paytmasida $A(x_1, x_2) = (2x_1, 3x_2)$ operatorini olaylik. $\langle Ax, y\rangle = \langle x, (2y_1, 3y_2)\rangle$ bo'lgani uchun $A^* = A$. Bu eng sodda modelda nazariy ta'rif koordinatalar bilan tekshiriladi.

Muhokama savoli. Agar A chegaralanmagan va butun H da aniqlanmagan bo'lsa, shu isbotni bevosita takrorlash mumkinmi? Yo'q: bunday operatorlar uchun aniqlanish sohalari masalasi alohida o'rganiladi. Ushbu maqolaning barcha asosiy teoremalari $A \in \mathcal{B}(H)$ holatiga tegishli.

3.2. Ikkinchi modul: algebraik xossalar va involyutsiya

Ekspert vazifasi. Qo'shma operatorning qo'shish va ko'paytirish amallari bilan bog'liqligini tekshirish, kompleks koeffitsiyentlar ta'sirini tushuntirish, $(A^*)^* = A$ ayniyatini isbotlash.

2-topshiriq. $H = \mathbb{C}^2$ da matritsa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

bilan berilgan operatorni tekshiring. Standart kompleks skalyar ko'paytma uchun qo'shma operator matritsasi qo'shma transponirlangan matritsadir:

(cc) BY

$$A^* = \overline{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & 2 \end{pmatrix}.$$

Bu yerda oddiy transponirlash yetarli emas: i soni kompleks qo‘shmalashda $-i$ ga almashadi. Tekshirish uchun $x = (x_1, x_2)$ va $y = (y_1, y_2)$ olib, ikki tomondagi skalyar ko‘paytmalarni koordinatalar bo‘yicha yozish mumkin. Masalaga qo‘shimcha ravishda

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 5 \end{pmatrix}, \qquad \| A \| = \sqrt{3 + \sqrt{5}}$$

olinishini tekshirish taklif etiladi. Haqiqatan, A^*A ning xos qiymatlari $3 \pm \sqrt{5}$ bo‘lib, eng katta xos qiymat operator normasining kvadratiga teng.

3-topshiriq. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ uchun $(AB)^* = B^*A^*$ ni bevosita hisoblang. So‘ng $(AB)^* = A^*B^*$ formulasi umumiy holda nima uchun noto‘g‘ri ekanligini tushuntiring. Bu topshiriqda bir xil formulani yodlab olish emas, ko‘paytirish tartibini tekshirish baholanadi.

3.3. Uchinchi modul: cheksiz o‘lchamli Hilbert fazosida siljitish

Ekspert vazifasi. ℓ^2 fazosida qo‘shma operatorni koordinatalar yordamida topish, o‘z-o‘ziga qo‘shmalik, normal va unitar operatorlar farqini namoyish etish.

4-topshiriq. $S: \ell^2 \to \ell^2$ o‘ngga siljitish operatori bo‘lsin:

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Ixtiyoriy $x, y \in \ell^2$ uchun

$$\langle Sx, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \, \overline{y_{n+1}} = \langle x, (y_2, y_3, \dots) \rangle.$$

Demak, $S^*(y_1, y_2, \dots) = (y_2, y_3, \dots)$ – chapga siljitish operatoridir. Har qanday x uchun $\| Sx \|_2 = \| x \|_2$ bo‘lgani sababli $\| S \| = 1$, natijada $\| S^* \| = 1$ ham bajariladi. Biroq

$$S^*S = I, \qquad SS^* = I - P_{e_1},$$

bu yerda P_{e_1} - birinchi koordinata bo‘yicha ortogonal proyeksiya. Shunday qilib, S izometriya bo‘lsa-da, unitar ham, normal ham emas. Talabalar “normani saqlash” va “unitarlik” bir xil shart emasligini aynan shu misolda tushunadilar.

Muhokama savoli. Nima uchun $S^*S = I$ munosabatidan $SS^* = I$ kelib chiqmaydi? Cheksiz o‘lchamli fazoda chap va o‘ng teskari operatorlar orasidagi farqni yoritish talab qilinadi.

3.4. To‘rtinchi modul: integral va ko‘paytirish operatorlari

Ekspert vazifasi. $L^2[0,1]$ fazosida integral operator va ko‘paytirish operatori uchun qo‘shma operatorni hisoblash, simmetrik yadro va o‘z-o‘ziga qo‘shmalikni farqlash.

5-topshiriq. $H = L^2[0,1]$ va

(cc) BY

$$(Tf)(x) = x\int_0^1 f\,(t)\,dt$$

operatorni olaylik. Skalyar ko‘paytma uchun integrallar tartibini almashtirib,

$$\langle Tf, g\rangle = \left(\int_0^1 f\,(t)\,dt\right)\left(\int_0^1 x\,\overline{g(x)}\,dx\right)$$

olamiz. Demak,

$$(T^*g)(t) = \int_0^1 x\,g(x)\,dx$$

ya’ni T^*g o‘zgarmas funksiya. T ning yadrosi $K(x,t) = x$ bo‘lsa, qo‘shma operatorning yadrosi $K^*(x,t) = \overline{K(t,x)} = t$ ko‘rinishidadir. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligiga ko‘ra $\| T \| \leq \| x \|_2 \| 1 \|_2 = 1/\sqrt{3}$. $f \equiv 1$ tanlanganda tenglik hosil bo‘ladi; shunday qilib,

$$\| T \| = \| T^* \| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Bu misol $T^* \neq T$ bo‘lsa ham operator normasi qo‘shmalashda o‘zgarmasligini ko‘rsatadi.

6-topshiriq. $(Mf)(t) = tf(t)$ ko‘paytirish operatori $L^2[0,1]$ da o‘z-o‘ziga qo‘shma bo‘lib, $\| M \| = 1$. Haqiqatan, $\langle Mf, g\rangle = \langle f, Mg\rangle$ va $\| Mf \|_2 \leq \| f \|_2$. Biroq hech bir normasi birga teng f uchun $\| Mf \|_2 = 1$ bo‘lmaydi, chunki $t^2 < 1$ deyarli barcha $t \in [0,1]$ da. $f_n(t) = \sqrt{n}\,1_{[1-1/n,1]}(t)$ tanlansa, $\| f_n \|_2 = 1$ va $\| Mf_n \|_2 \to 1$. Shuning uchun operator normasi supremum bo‘lib, unga har doim ham erishilmasligi yana bir bor ochib beriladi.

7-topshiriq (integrativ). $A = A^*$ bo‘lsa, $\langle Ax, x\rangle$ ning haqiqiyligini isbotlang. So‘ng $\mathbb{C}^2$ da $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ matritsa uchun $A^* = A$ ekanligini tekshiring. Har bir talaba natijani avval matritsa, keyin skalyar ko‘paytma yordamida asoslab, ikki yondashuvni bog‘lashi kerak.

4. 90 DAQIQALIK MASHG‘ULOTNING TASHKILIY MODELI

Dastlabki tezisda ko‘rsatilgan besh bosqich va ularning vaqti saqlanadi: 10 + 20 + 30 + 20 + 10 = 90 daqiqa. Mashg‘ulot 16 nafar talaba misolida tavsiflanadi: to‘rtta boshlang‘ich guruhning har birida to‘rttadan talaba bo‘ladi. Talabalar 1-4 raqamlarini oladilar; bir xil raqamlilar ekspertlar guruhini tuzadilar. Boshqa sonli auditoriyada guruhlar shunga mos ravishda moslashtiriladi.

1-bosqich - guruhlash (10 daqiqa). O‘qituvchi skalyar ko‘paytma konvensiyasini eslatadi, dars maqsadini tushuntiradi va guruhlar tarkibini belgilaydi. Diagnostik savollar: “Haqiqiy va kompleks Hilbert fazosining farqi nimada?”, “Matritsa transponirlanishi bilan qo‘shma transponirlanishi nimasi bilan farqlanadi?” Javoblar keyingi ekspert modulida qaysi masalalarga e’tibor qaratish kerakligini ko‘rsatadi.

(cc) BY

2-bosqich - ekspertlar izlanishi (20 daqiqa). Har bir ekspert guruhi o‘z modulidagi asosiy natijani, isbot rejasini va kamida bitta misolni tayyorlaydi. Tayyorlangan kartochkada to‘rtta element bo‘ladi: tasdiq, asoslash, tekshirish misoli, keng tarqalgan xato. O‘qituvchi ayniqsa kompleks skalyar ko‘paytma, normaga erishish va siljitish operatori haqidagi fikrlarni nazorat qiladi.

3-bosqich - boshlang‘ich guruhga qaytish (30 daqiqa). Har bir talaba o‘z modulini guruhdoshlarga 6-7 daqiqa davomida o‘rgatadi. Qolgan a’zolar izoh beradi va to‘ldiruvchi savollar yo‘llaydi. Guruh yakunda to‘rt modul o‘rtasidagi bog‘lanishni yagona sxemada ifodalaydi: ta’rif → mavjudlik → algebraik xossalar → aniq operatorlarda tatbiq.

4-bosqich - kross-nazorat (20 daqiqa). O‘qituvchi talabadan o‘zi ekspert bo‘lmagan modulga doir savol so‘raydi. Masalan, birinchi modul vakili $(AB)^*$ ni isbotlaydi; ikkinchi modul vakili ℓ^2 dagi siljitish qo‘shmasini tushuntiradi; uchinchi modul vakili integral operatorning qo‘shmasini hisoblaydi. Bunday almashinuv o‘rganishning boshqa talabalarga haqiqatan ham yetib borganini tekshiradi.

5-bosqich - refleksiya va baholash (10 daqiqa). Talabalar qaysi xossani endi mustaqil isbotlay olishini, qaysi dalilni hali aniqlashtirish kerakligini yozadilar. O‘qituvchi umumiy xatolarni qisqa ta’kidlab, keyingi dars uchun individual topshiriqlar beradi.

1-jadval.

“Bumerang” texnologiyasida o‘qituvchi va talabalar faoliyatining integratsiyasi

Mashg‘ulot bosqichi	O‘qituvchi faoliyati	Talaba faoliyati
Guruhlash	Maqsad va mezonlarni e’lon qiladi	Tayanch bilimni faollashtiradi
Ekspertlar izlanishi	Moduldagi isbotni tekshiradi	Tasdiq, isbot va misol tuzadi
Bumerang qaytishi	O‘zaro ta’limni muvofiqlashtiradi	Boshqalarga mavzuni tushuntiradi
Kross-nazorat	Turli modullardan savol beradi	Begona modulni mustaqil izohlaydi
Refleksiya	Xatolarni umumlashtiradi	O‘z natijasini qayta baholaydi

5. BAHOLASH MEZONLARI VA PEDAGOGIK SAMARADORLIKNI TEKSHIRISH

Bilimni baholashda faqat to‘g‘ri natija uchun emas, matematik dalilning to‘liqligi uchun ham ball berish zarur. Quyidagi 20 ballik rubrika taklif etiladi: (1) matematik ta’rif va shartlarni aniq ifodalash - 4 ball; (2) isbotning mantiqiy izchilligi - 6 ball; (3) konkret operator uchun to‘g‘ri hisoblash - 4 ball; (4) boshqa modul savoliga javob va o‘zaro muloqot - 4 ball; (5) refleksiya hamda xatoni tuzatish 2 ball. Rubrika og‘zaki taqdimot va yozma topshiriqlar natijalarini yagona mezonda taqqoslashga xizmat qiladi.

Baholash uchun nazorat savollari: qo‘shma operator mavjudligi qanday teoremaga asoslanadi? Nega $\| A^* \| = \| A \|$? $(AB)^*$ ni topishda ko‘paytma tartibi nima uchun teskari bo‘ladi? $S^*S = I$ dan unitar operatorlik kelib chiqadimi? O‘z-o‘ziga

(cc) BY

qo‘shma operatorning $\langle Ax, x\rangle$ ifodasi nega haqiqiy? Har bir javobda talabadan ta’rif, qisqa dalil va kamida bir misol talab qilinadi.

Mazkur tadqiqotning natijasi hozircha sinov uchun tayyor metodik modeldir; real tajriba ishtirokchilari soni, o‘tkazilgan dars sanasi, oldingi va keyingi test ballari berilmagani uchun samara oshganini ma’lum foizda e’lon qilish ilmiy jihatdan asosli bo‘lmaydi. Asl tezisda uchraydigan 28-30% ko‘rsatkichni tasdiqlaydigan birlamchi ma’lumotlar taqdim etilmagan. Shu bois bu raqam maqolaga isbotlangan natija sifatida ko‘chirilmaydi.

Kelgusi empirik baholashda ikki taqqoslanadigan guruhga bir xil boshlang‘ich diagnostika va yakuniy test berilishi tavsiya etiladi. Test savollari to‘rtta ko‘nikmani qamrab olishi kerak: ta’rifni bilish, isbotni tushuntirish, qo‘shma operatorni hisoblash va qarshi misol orqali noto‘g‘ri fikrni rad etish. Boshlang‘ich bilimdagi farq nazorat qilinishi, baholash mezonlari darsdan avval aniqlanishi va natijalarga mos statistik usul tanlanishi lozim. Namuna hajmi kichik bo‘lsa, foiz farqini sababiy ta’sir sifatida talqin qilishdan saqlanish kerak.

Faol o‘qitish bo‘yicha keng tadqiqotlarda ijobiy umumiy natijalar qayd etilgan [5], ammo ularning ko‘rsatkichlari bevosita “Bumerang” texnologiyasi yordamida qo‘shma operatorlarni o‘rganayotgan ayni auditoriyaning natijalariga tenglashtirilmaydi. Shu jihat metodik tavsiyani ilmiy dalil bilan aralashtirib yubormaslik uchun muhimdir.

6. MUHOKAMA: METODNING IMKONIYATLARI VA CHEGARALARI

“Bumerang” modelining birinchi afzalligi – individual javobgarlik: har bir talabaga boshqalarning bilimini to‘ldirish vazifasi yuklanadi. Ikkinchisi - kommunikativ kompetensiya: murakkab formulani tushuntirish talabaning matematik nutqini aniqlashtiradi. Uchinchisi - diagnostika: kross-savollar eshitib tushunish bilan haqiqiy o‘zlashtirish o‘rtasidagi tafovutni aniqlaydi. To‘rtinchisi - nazariya va amaliyotning uzviyligi: Ris teoremasi, operatorlar algebrasi va konkret L^2 yoki ℓ^2 misollari bir mashg‘ulotda bog‘lanadi.

Shu bilan birga, texnologiyaning cheklovlari ham bor. Bir guruhda noto‘g‘ri isbot qabul qilinsa, xato boshqa guruhlarga ham tarqalishi mumkin; shuning uchun o‘qituvchi ekspert xulosalarini oldindan tekshirishi shart. Talabalar tayyorgarligidagi farq muhokama sur’atini sekinlashtirishi mumkin; buning oldini olish uchun bazaviy savollar, kengaytirilgan savollar va tayyorlangan tekshirish mezonlari beriladi. Darsda vaqt rejimini saqlash va taqsimlangan rollarni adolatli almashtirib borish ham muhim.

Nazariy nuqtai nazardan qo‘shma operatorning mavjudlik isboti barcha talabalar uchun bir xil qiyinchilikda bo‘lmaydi. Shu sababli birinchi ekspert modulidagi “Ris teoremasi nima deydi?” savoliga javob berish bilan “nega bu teorema aynan f_y ga tatbiq etiladi?” savoliga javob berish alohida baholanadi. Shuningdek, integral

(cc) BY

operatorlarda qo‘shma yadroni yozishda argumentlar joyining almashishi va kompleks qo‘shmalash talabalar tomonidan alohida tekshiriladi.

Metodik ishlanma boshqa mavzularga ham moslashtirilishi mumkin: ortogonal proyeksiyalar, kompakt operatorlar, normal operatorlar, spektr va rezolventa. Biroq har bir yangi mavzu uchun ekspert modullari matematik jihatdan qayta loyihalanishi, tayyor formulalarning mexanik almashtirilishi bilan cheklanilmasligi lozim.

Ta’kidlash joizki, [9-11] maqolalarda o‘z-o‘ziga qo‘shma panjaraviy modellarning muhim spektri haqiqiy sonlar o‘qida joylashishi bilan bog‘liq masalalar tadqiq etilgan. [12-15] maqolalarda o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorlarning muhim spektri quyi chegarasini baholashga oid natijalar olingan bo‘lsa, [16-19] maqolalarda o‘z-o‘ziga qo‘shma ikki kanalli molekulyar-rezonans modelining spektral xossalari o‘rganilgan. Mazkur tadqiqotlarda qaralayotgan operatorlarning o‘z-o‘ziga qo‘shmalik xossasi spektral tahlilning asosiy nazariy shartlaridan biri sifatida muhim ahamiyat kasb etgan.

XULOSA

Ushbu maqolada funksional analiz kursining “Qo‘shma operatorlar” mavzusi uchun “Bumerang” texnologiyasiga asoslangan yaxlit ilmiy-uslubiy model ishlab chiqildi. Modelning nazariy qismi qo‘shma operatorning Ris teoremasiga tayangan mavjudligi va yagonaligi, algebraik xossalari, normaning saqlanishi, shuningdek, o‘z-o‘ziga qo‘shma hamda unitar operatorlar bilan aloqasini qamrab oldi. Matematik xossalarning ta’rif-isbot-misol ketma-ketligida bayon qilinishi talabalar uchun mantiqiy tayanch vazifasini bajaradi.

O‘quv jarayoni to‘rtta ekspert moduliga, beshta tashkiliy bosqichga va 90 daqiqalik mashg‘ulot rejasiga ajratildi. Matritsa, siljitish, integral va ko‘paytirish operatorlari bilan bog‘liq topshiriqlar abstrakt natijalarni tekshirish imkonini beradi. Kross-nazorat va 20 ballik baholash rubrikasi individual mas’uliyatni hamda o‘zaro ta’lim natijalarini ko‘rishga xizmat qilishi mumkin.

Tavsiya etilgan texnologiyaning o‘quv samaradorligini aniq sonlarda baholash uchun uni real auditoriyada oldindan tuzilgan diagnostik reja asosida sinash talab etiladi. Shunday yondashuv metodik xulosalarning ishonchliligini saqlagan holda, talabalarning mustaqil isbotlash, matematik muloqot va amaliy hisoblash kompetensiyalarini rivojlantirish yo‘llarini tizimli izlashga imkon yaratadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Conway J. B. A Course in Functional Analysis. 2nd ed. New York: Springer, 1990.

2. Kreyszig E. Introductory Functional Analysis with Applications. New York: John Wiley & Sons, 1978.

(cc) BY

3. Aronson E., Blaney N., Stephan C., Sikes J., Snapp M. The Jigsaw Classroom. Beverly Hills, CA: Sage Publications, 1978.

4. Mazur E. Peer Instruction: A User's Manual. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997.

5. Freeman S., Eddy S. L., McDonough M., et al. Active learning increases student performance in science, engineering, and mathematics. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2014, 111(23), 8410-8415.

6. Rasulov T.H., Umarova U.U. The role of modern information and communication technologies in the organization of distance education. AIP Conference Proceedings, 2023, 2901, 030008.

7. T.H.Rasulov, X.R.Rasulov. Methodical recommendations for teaching the department of functions with limited variability. Scientific progress 2:1 (2021), pp. 559-567.

8. T.Kh.Rasulov. Innovative technologies for studying the topic of linear integral equations. Science, technology and education 73:9 (2020), pp. 74-76.

9. Бахронов Б.И., Мансуров Т.З. Вычисление существенного спектра обобщенной модели Фридрихса в системе MAPLE // Наука, техника и образование. 2-2 :77 (2021), стр. 35-38.

10. Dilmurodov E.B., Bahronov B.I., Khayitova Kh.G., Kurbonov G.G., Norchayev R.T. On the eigenvalues of the lattice spin-boson model with at most one photon // E3S Web of Conferences. 587 (2024), art. no. 01002.

11. Т.Х.Расулов. О числе собственных значений одного матричного оператора. Сибирский математический журнал. 52:2 (2011), С. 400-415.

12. Bahronov B., Ashurova D., Bobokulov O., Navruzova M., Ikramova A. Spectrum of Friedrichs models tensor sum // AIP Conference Proceedings 3498:1 (2026), art. no. 050045.

13. Jurakulova F. Estimates for the lower and upper bounds of the essential spectrum of a 3x3 operator matrix // AIP Conf. Proc. 3377:1 (2025), art. no. 030018.

14. T.Kh.Rasulov. On branches of the essential spectrum of the lattice spin-boson model with at most two photons. Teoret. Mat. Fiz. 186:2 (2016), pp. 293-310.

15. Т.Х.Расулов, Э.Б.Дилмуродов. Исследование числовой области значений одной операторной матрицы. Вестник Самарского государственного технического университета, Серия физико-математические науки, 35:2 (2014), С. 50-63.

16. Ismoilova D.E. To'rt o'lchamli qo'zg'alishga ega ikki kanalli molekulyar-rezonans modelining muhim va diskret spektrlari // Scientific progress. 2:3 (2021), 44-50 b.

17. Tosheva N.A., Ismoilova D.E. Ikki kanalli molekulyar-rezonans modelining sonli tasviri // Scientific progress. 2:1 (2021), 1421-1428 b.

18. Т.Х.Расулов. Асимптотика дискретного спектра одного модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке. Теоретическая и математическая физика. 163:1 (2010), С. 34-44.

19. Ismoilova D.E. To'rt o'lchamli qo'zg'alishga ega ikki kanalli molekulyar-rezonans modelining rezolventasi // Scientific progress. 2:3 (2021), 143-152 b.