"Chegaralangan operator normasi" mavzusini o'qitishda "FSMU" texnologiyasidan foydalanishning ilmiy-uslubiy asoslari

Farangis Jo'raqulova
Buxoro davlat universiteti

Annotatsiya: Maqolada funksional analiz kursining "Chegaralangan operator normasi" mavzusini FSMU (Fikr-Sabab-Misol-Umumlashtirish) texnologiyasi asosida o'qitishning nazariy va amaliy jihatlari ishlab chiqilgan. Operator normasi, uzluksizlik va chegaralanganlik ekvivalentligi, normaning asosiy xossalari, kompozitsiya va normaga erishish masalalari izchil matematik dalillar bilan bayon etiladi. Muammoli topshiriqlar, FSMU xaritalari, 80 daqiqalik mashg'ulot ssenariysi hamda mezonli baholash modeli tavsiya etiladi. Mazkur ish tajriba natijalari emas, ilmiy-uslubiy loyiha va uni sinovdan o'tkazish mexanizmini taqdim etadi.

Kalit so'zlar: chegaralangan chiziqli operator, operator normasi, funksional analiz, supremum, submultiplikativlik, FSMU texnologiyasi, matematik isbot, interfaol ta'lim

Scientific-Methodological Foundations for Using the "FSMU" Technology in Teaching the Topic "Norm of a Bounded Operator"

Farangis Juraqulova
Bukhara State University

Abstract: This article develops a theoretical and practical framework for teaching the norm of a bounded linear operator in functional analysis using the FSMU approach (Statement-Reason-Example-Generalization). Operator norms, the equivalence of boundedness and continuity, norm inequalities, operator composition, and norm attainment are discussed with rigorous arguments. Problem-based tasks, FSMU worksheets, an 80-minute lesson plan, and an assessment rubric are proposed. The paper presents an instructional design and an evaluation protocol rather than claiming experimentally verified gains.

Keywords: bounded linear operator, operator norm, functional analysis, supremum, submultiplicativity, FSMU approach, mathematical proof, interactive learning

(cc) BY

KIRISH

Funksional analizda normalangan fazolar va ular orasidagi chegaralangan chiziqli operatorlar tushunchasi zamonaviy matematik tahlilning asosiy tayanchlaridan biridir [1-3]. Operator normasi abstrakt akslantirishni miqdoriy baholash, operatorli tenglamalarning turg‘unligini tekshirish va yaqinlashish masalalarini tadqiq etish imkonini beradi [4-6]. Shu sababli bu tushunchani faqat ta’rif sifatida emas, balki matematik mulohaza yuritish vositasi sifatida o‘rgatish zarur. [7-9] maqolalarda matematikaga oid fanlarni, xususan Funksional analiz tushunchalarini talabalarga o’rgatishda pedagogik texnologiyalarning qo’llanilishi haqidagi fikrlar batafsil yoritilgan.

[10-13] maqolalarda chiziqli chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma operatorlarning spektral xossalarini o'rganishda chegaralangan operatorlar uchun ishlab chiqilgan usullar qo'llanilgan, [14-17] maqolalarda o'z-o'zigan qo'shma operatorining spektri chegaralangan to'plamdan iborat bo'lishida tadqiq qilinayotgan operatorning chegaralangan ekanligi muhim ahamiyat kasb etgan, [18-20] maqolalarda esa chegaralangan operatorning xos qiymatlari haqida ayrim mulohazalar keltirilgan.

Talabalar ko‘pincha supremum bilan maksimumni bir xil tushunadi, birlik shar va birlik sfera orasidagi farqni e’tibordan chetda qoldiradi, chekli o‘lchamli fazolardagi natijalarni cheksiz o‘lchamli fazolarga asossiz ko‘chiradi. Shuningdek, $||AB|| \leq ||A||||B||$ tengsizligi qachon tenglikka aylanishini alohida tahlil qilish talab etiladi.

FSMU texnologiyasida har bir tasdiq to‘rt bo‘g‘in orqali tekshiriladi: F - aniq fikrni ifodalash; S - sababni nazariy asoslash; M - hisoblash yoki qarshi misol; U - shartlar va cheklovlarni ko‘rsatgan holda umumlashtirish. Bu struktura matematik isbotning gipoteza, dalil va xulosa qismlariga tabiiy mos keladi.

Tadqiqot maqsadi - “Chegaralangan operator normasi” mavzusida FSMU yondashuvining didaktik modelini ishlab chiqish, nazariy va amaliy topshiriqlar ketma-ketligini tuzish hamda talabalar javobini xolis baholash mezonlarini belgilash. Ishning obyekti - oliy ta’limda funksional analizni o‘qitish jarayoni; predmeti - operator normasi mavzusida dalillashga yo‘naltirilgan interfaol topshiriqlar tizimi.

1. NAZARIY ASOSLAR VA ASOSIY TUSHUNCHALAR

X va Y bir xil $K = \mathbb{R}$ yoki $\mathbb{C}$ maydon ustidagi normalangan chiziqli fazolar bo‘lsin. $A: X \to Y$ operator chiziqli deyiladi, agar barcha $x, y \in X$ va $\alpha, \beta \in K$ uchun quyidagi tenglik bajarilsa:

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

Ta’rif. A chiziqli operator chegaralangan deyiladi, agar shunday $M \geq 0$ mavjud bo‘lib, barcha $x \in X$ uchun $||Ax|| \leq M||x||$ bajarilsa. Chegaralangan chiziqli operatorning normasi quyidagicha aniqlanadi:

$$||A|| = sup\{||Ax|| : ||x|| \leq 1\}.$$

(cc) BY

$X = \{0\}$ bo‘lsa, norma 0 deb olinadi. X nol bo‘lmagan fazo bo‘lganda chiziqlilikdan quyidagi ekvivalent ifodalar kelib chiqadi:

$$||A|| = sup(||Ax||/||x||, x \neq 0) = sup\{||Ax|| : ||x|| = 1\}.$$

2. CHEGARALANGANLIK VA UZLUKSIZLIKNING TENGKUCHLILIGI

Teorema. Normalangan fazolar orasidagi chiziqli $A: X \to Y$ operatorning chegaralangan bo‘lishi uning nol nuqtada uzluksiz bo‘lishiga, demak, butun X da uzluksiz bo‘lishiga tengkuchlidir.

Isbot. Agar $||Ax|| \leq M||x||$ bo‘lsa, istalgan x,x₀ uchun $||Ax - Ax_0|| = ||A(x - x_0)|| \leq M||x - x_0||$. Demak, A Lipschitz uzluksiz. Aksincha, A nol nuqtada uzluksiz bo‘lsin. $\varepsilon = 1$ uchun shunday $\delta > 0$ topiladiki, $||z|| < \delta$ bo‘lsa, $||Az|| < 1. x \neq 0$ uchun $z = (\delta/(2||x||))x$ deb olamiz. U holda $||z|| = \delta/2 < \delta$ va $||Ax|| < 2||x||/\delta$. Shunday qilib, A chegaralangan.

Metodik jihatdan bu isbotning ikki yo‘nalishini alohida FSMU xaritalariga ajratish maqsadga muvofiq: birinchisida normadan uzluksizlikka, ikkinchisida nol nuqtadagi uzluksizlikdan umumiy bahoga o‘tiladi.

3. OPERATOR NORMASINING ASOSIY XOSSALARI

$A, B \in L(X, Y), \alpha \in K$ bo‘lsin. Quyidagi xossalar o‘rinli:

$$||A|| \geq 0;\ ||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0;\ ||\alpha A|| = |\alpha|\ ||A||.$$

$$||A + B|| \leq ||A|| + ||B||.$$

Uchburchak tengsizligi isboti: har qanday $||x|| \leq 1$ uchun $||(A + B)x|| \leq ||Ax|| + ||Bx|| \leq ||A|| + ||B||$. Birlik shar bo‘yicha supremum olinsa, talab qilingan natija hosil bo‘ladi.

$A: X \to Y$ va $B: Y \to Z$ chegaralangan chiziqli operatorlar bo‘lsa, ularning kompozitsiyasi ham chegaralangan va submultiplikativlik xossasi bajariladi:

$$||BA|| \leq ||B||\ ||A||.$$

Isbot. $||BAx|| \leq ||B||||Ax|| \leq ||B||||A||||x||$. Barcha x uchun bir xil baho o‘rinli bo‘lgani sababli $||BA|| \leq ||B||||A||$. Bunda tenglik har doim ham bajarilmaydi; masalan, $\mathbb{R}^2$ da $A = diag(1,0), B = diag(0,1)$ bo‘lsa, $BA = 0$, lekin $||A|| = ||B|| = 1$.

Agar X Banax fazo bo‘lsa, $L(X)$ operator normasi va kompozitsiya bilan birlikli Banax algebrasini tashkil etadi. Bu fikrni alohida shart −X ning to‘laligi − bilan birga berish muhim; faqat normalanganlikni Banaxlik bilan adashtirish mumkin emas.

4. FSMU TEXNOLOGIYASINING DIDAKTIK MODELI

FSMU yondashuvining asosiy vazifasi talabaning “natijani bilish” darajasidan “natijani nima uchun bilishini isbotlash” darajasiga o‘tishini tashkil etishdir. F bosqichida tasdiqning mantiqiy ko‘lami aniqlanadi; S bosqichida ta’rif, lemma yoki teoremaga tayaniladi; M bosqichida konkret hisoblash yoxud qarshi misol keltiriladi; U bosqichida natijaning qo‘llanish sohasi va chegarasi belgilanadi.

(cc) BY

Bosqich	Talaba bajaradigan faoliyat	Tekshirish savoli
F - Fikr	Aniq matematik tasdiqni yozadi	Tasdiq qaysi fazolar va operatorlar uchun?
S - Sabab	Ta'rif yoki teoremaga tayangan dalil beradi	Qaysi qadam asoslanishi kerak?
M - Misol	Operator normasini hisoblaydi yoki qarshi misol topadi	Hisoblash shartlarga mosmi?
U - Umumlashtirish	Natijani shartlari bilan umumlashtiradi	Xulosa har doim o'rinlimi?

FSMU kartochkasida talabaga faqat savol emas, balki "tasdiq - dalil - hisoblash - xulosa" ketma-ketligini to'ldirish uchun alohida maydonlar beriladi. Guruh muhokamasida javobni emas, asoslashning kuchli va zaif jihatlarini solishtirish tavsiya etiladi.

5. FSMU ASOSIDA ISHLANGAN MATEMATIK TOPSHIRIQLAR

1-topshiriq. $\mathbb{R}^2$ da Evklid normasi bilan $A(x_1, x_2) = (3x_1, 2x_2)$ operatorning normasini aniqlang.

F: $||A|| = 3. S: ||Ax||^2 = 9{x_1}^2 + 4{x_2}^2 \leq 9({x_1}^2 + {x_2}^2) = 9||x||^2$. M: $x = (1,0)$ tanlansa, $||Ax|| = 3$ va $||x|| = 1$. U: diagonal matritsaning Evklid normasidagi operator normasi uning diagonal elementlari modullarining maksimumiga teng (diagonal holatda).

$$||A|| = max\{|3|, |2|\} = 3.$$

2-topshiriq. $X = C[0,1]$ da supremum normasi bilan $(Tf)(t) = t\, f(t)$ operatorni tekshiring.

F: T chegaralangan va $||T|| = 1$. S: $||Tf|| \leq ||f||$, chunki $0 \leq t \leq 1$. M: $f(t) \equiv 1$ bo'lganda $||Tf|| = 1$. U: uzluksiz ko'paytiruvchi g uchun operatorining normasi $||g||$ ga teng.

$$||Tf|| = max(0 \leq t \leq 1)|t\, f(t)| \leq ||f||.$$

3-topshiriq. $X = \ell^2$ da $A(x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2/2, x_3/3, \dots)$ operator normasini toping.

F: $||A|| = 1. S: \sum|x_n/n|^2 \leq \sum|x_n|^2$. M: $e_1 = (1,0,\dots)$ uchun $||Ae_1|| = 1$. U: diagonal operatorning normasi diagonal koeffitsiyentlar modullarining supremumiga teng.

$$||A|| = sup\{1/n : n \geq 1\} = 1.$$

4-topshiriq. Operator normasi har doim birlik sferada erishiladimi?

F: Cheksiz o'lchamli fazolarda shart emas. S: ℓ^2 fazoda $A(x_1, x_2, \dots) = (a_1x_1, a_2x_2, \dots)$ va $a_n = 1 - 1/n$ bo'lsin. Barcha n uchun $a_n < 1$, lekin $sup\ a_n = 1$. M: $||A|| = 1$, ammo $x \neq 0$ bo'lsa, $||Ax||^2 = \sum{a_n}^2|x_n|^2 < \sum|x_n|^2 = ||x||^2$. U: normaga erishish va supremumning mavjudligi boshqa-boshqa tushunchalardir.

$$||A|| = 1, ||Ax|| < 1\ (||x|| = 1).$$

5-topshiriq. Kompozitsiya uchun $||BA|| = ||B||||A||$ tengligi doimo o'rinlimi?

(cc) BY

F: Yo‘q. S: umumiy holda faqat $\leq$ baho isbotlanadi. M: $A(x,y)=(x,0)$, $B(x,y)=(0,y)$ operatorlari uchun $BA=0, ||A||=||B||=1$. U: submultiplikativlikda tenglik maxsus geometrik moslikni talab etadi.

6-topshiriq. $X=C^1[0,1]$ fazoni $||f||$ normasi bilan qarab, $Df=f'$ operatorining chegaralanganligini tekshiring (kodomen $C[0,1], ||\cdot||$).

F: D chegaralanmagan. S: $f_n(t)=t^n$ uchun $||f_n||=1$, ammo $||Df_n||=n$. M: $n\to\infty$ da norma nisbati cheksiz o‘sadi. U: operatorning chegaralanganligi tanlangan fazo normalariga bog‘liq; hosila olish operatori ushbu normada chegaralanmagan.

$$||Df_n|| \,/\, ||f_n|| = n \to \infty.$$

6. 80 DAQIQALIK AMALIY MASHG‘ULOT SSENARIYSI

Vaqt	Faoliyat	Kutiladigan natija
0-10 daqiqa	Muammoli savol va boshlang‘ich diagnostika	Supremum, normaning ta’rifi esga olinadi
10-25 daqiqa	Individual FSMU xaritasini to‘ldirish	Har talaba mustaqil tasdiq va dalil yozadi
25-50 daqiqa	Kichik guruhda hisoblash va bahs	Misol va qarshi misollar tekshiriladi
50-70 daqiqa	Guruh taqdimoti va isbotni himoya qilish	Matematik dalillash takomillashadi
70-80 daqiqa	Refleksiya va mezonli baholash	Xatolar aniqlanadi, qayta aloqa beriladi

Mashg‘ulotning birinchi bosqichida “Chegaralangan operatorning normasi nega maksimum emas, supremum orqali aniqlanadi?” savoli beriladi. Keyingi bosqichlarda talabalar 1-4-topshiriqlarni individual yoki juftlikda bajarib, 5-6-topshiriqlarni guruhda tahlil qiladi. Guruh vakillari faqat javobni emas, normani baholashda ishlatilgan tengsizlik va tenglikka erishish masalasini ham asoslaydi.

7. BAHOLASH MEZONLARI VA TADQIQOTNI SINOVDAN O‘TKAZISH

Mezon	Maksimal ball	Tavsif
Fikrning aniqligi	2	Tasdiq shartlari va obyektlar to‘g‘ri berilgan
Sababning qat’iyligi	3	Ta’rif yoki teoremaga tayangan to‘liq asos
Misolning to‘g‘riligi	3	Hisoblash, baholash yoki qarshi misol xatosiz
Umumlashtirish	2	Natija doirasi va cheklovi ko‘rsatilgan
Jami	10	Yig‘indi baho

Metod samaradorligini empirik tekshirish uchun bir xil dastlabki tayyorgarlikka ega tajriba va taqqoslash guruhlarida pretest-posttest modeli qo‘llanishi mumkin. Diagnostika topshiriqlari operator normasi ta’rifi, tengsizlikni isbotlash, normaga erishish va qarshi misol tuzish kabi to‘rt ko‘nikmani o‘lchashi lozim. Natijalar guruhlar kesimida tavsifiy statistika va tegishli statistik sinovlar yordamida tahlil qilinadi.

Dastlabki tezisda o‘zlashtirish 28-30 foizga oshgani haqida fikr mavjud, biroq ishtirokchilar soni, test materiallari va hisoblash usuli berilmagan. Shu sababli ushbu kengaytirilgan maqolada bu ko‘rsatkich tasdiqlangan empirik natija sifatida keltirilmaydi. Natijani asoslash uchun boshlang‘ich va yakuniy ballar, tanlanma tavsifi hamda statistik tahlil talab etiladi.

(cc) BY

Metodning ehtimoliy cheklovlari ham hisobga olinishi zarur: matematik asoslashga ko‘p vaqt ketishi, ayrim talabalar guruh ishida passiv qolishi, noto‘g‘ri qarshi misollarning ishonchli ko‘rinishi va baholash subyektivligi. Bularni kamaytirish uchun individual yozma javob, rollarni navbat bilan almashtirish va yagona rubrikadan foydalanish taklif etiladi.

8. MUHOKAMA

FSMU texnologiyasi operator normasi mavzusida ayniqsa foydali metodik vosita bo‘lishi mumkin, chunki unda har bir xossa nafaqat ifodalanadi, balki isbot va misol bilan mustahkamlanadi. Masalan, “operator normasi birlik sferada erishiladi” degan noto‘g‘ri umumlashtirish 4-topshiriqdagi qarshi misol bilan tuzatiladi. Bunda talaba chekli o‘lchamli fazodagi kompaktlik g‘oyasini cheksiz o‘lchamli holat bilan taqqoslashga undaladi.

Yondashuvning boshqa metodlardan farqi javobning tuzilmasiga qat’iy talab qo‘yishidadir: talaba aniq fikr, mantiqiy sabab, matematik misol va umumiy xulosani bir-biridan ajratadi. Biroq bunday tashkil etishning o‘zi yuqori natijani kafolatlamaydi; samaradorlik o‘qituvchi tayyorgarligi, topshiriqlar murakkabligi va baholash sifati bilan bog‘liq.

XULOSA

“Chegaralangan operator normasi” mavzusini FSMU texnologiyasi asosida o‘qitish uchun nazariy ta’riflar, asosiy xossalar va ularning isbotlari bilan uyg‘unlashgan bosqichli topshiriqlar tizimi ishlab chiqildi. Taklif etilgan model talabalarning operator normasini hisoblash, shartlarni aniqlash, qarshi misol keltirish va matematik umumlashtirish ko‘nikmalarini mashq qildirishga yo‘naltirilgan.

Metodik tavsiya sifatida har bir muammoli topshiriqda normaning yuqori bahosini va unga erishish masalasini alohida ko‘rib chiqish, guruh bahsida dalil sifatini ustuvor qo‘yish, individual FSMU xaritasini yig‘ib borish hamda natijalarni oldindan belgilangan rubrika asosida baholash tavsiya etiladi. Keyingi tadqiqot bosqichida ushbu modelning real o‘quv natijalariga ta’sirini nazoratli pedagogik tajriba orqali baholash maqsadga muvofiq.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Kreyszig E. Introductory Functional Analysis with Applications. Wiley, 1978.

2. Conway J. B. A Course in Functional Analysis. 2nd ed. Springer, 1990.

3. Rudin W. Functional Analysis. 2nd ed. McGraw-Hill, 1991.

4. Lax P. D. Functional Analysis. Wiley-Interscience, 2002.

5. Vygotsky L. S. Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes. Harvard University Press, 1978.

6. Prince M. Does Active Learning Work? A Review of the Research. Journal of Engineering Education, 93(3), 2004, pp. 223-231.

7. Rasulov T., Kurbonov G. Effective use of digital learning technologies in the educational process // AIP Conference Proceedings, 2901:1 (2023), art. no. 030007.

8. T.Kh.Rasulov. Innovative technologies for studying the topic of linear integral equations // Science, technology and education 73:9 (2020), pp. 74-76.

9. Rasulov T.H., Umarova U.U. The role of modern information and communication technologies in the organization of distance education // AIP Conference Proceedings, 2901:1 (2023), art. no. 030008.

10. Бахронов Б.И., Мансуров Т.З. Вычисление существенного спектра обобщенной модели Фридрихса в системе MAPLE // Наука, техника и образование. 2-2 :77 (2021), стр. 35-38.

11. Dilmurodov E.B., Bahronov B.I., Khayitova Kh.G., Kurbonov G.G., Norchayev R.T. On the eigenvalues of the lattice spin-boson model with at most one photon // E3S Web of Conferences. 587 (2024), art. no. 01002.

12. Расулов Т.Х. Асимптотика дискретного спектра одного модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке // Теоретическая и математическая физика. 163:1 (2010), С. 34-44.

13. Bahronov B., Ashurova D., Bobokulov O., Navruzova M., Ikramova A. Spectrum of Friedrichs models tensor sum // AIP Conference Proceedings 3498:1 (2026), art. no. 050045.

14. Jurakulova F. Estimates for the lower and upper bounds of the essential spectrum of a 3x3 operator matrix // AIP Conf. Proc. 3377:1 (2025), art. no. 030018.

15. Rasulov T.H., Dilmurodov E.B. Essential spectrum of a 2x2 operator matrix and the Faddeev equation // European science 51:2 (2020), pp.7-10.

16. Ismoilova D.E. To'rt o'lchamli qo'zg'alishga ega ikki kanalli molekulyar-rezonans modelining muhim va diskret spektrlari // Scientific progress. 2:3 (2021), 44-50 b.

17. Rasulov T.Kh. On branches of the essential spectrum of the lattice spin-boson model with at most two photons // Teoret. Mat. Fiz. 186:2 (2016), pp. 293-310.

18. Tosheva N.A., Ismoilova D.E. Ikki kanalli molekulyar-rezonans modelining sonli tasviri // Scientific progress. 2:1 (2021), 1421-1428 b.

19. Расулов Т.Х. О числе собственных значений одного матричного оператора // Сибирский математический журнал. 52:2 (2011), С. 400-415.

20. Ismoilova D.E. To'rt o'lchamli qo'zg'alishga ega ikki kanalli molekulyar-rezonans modelining rezolventasi // Scientific progress. 2:3 (2021), 143-152 b.