"Integral tenglamalarni fredholm usuli bilan yechish" mavzusini o'qitishda muammoli ta'lim va "keys-stadi" metodlarini qo'llash

Shohida Bobojon-qizi Ne'matova
Buxoro davlat universiteti

Annotatsiya: Maqolada oliy ta'lim muassasalarining matematika yo'nalishi talabalariga ikkinchi tur Fredholm integral tenglamalarini Fredholm determinantlari (rezolventa) usuli bilan yechishni o'rgatishning metodik jihatlari yoritilgan. Mavzuni o'zlashtirishda samarali deb topilgan ikkita interfaol metod - muammoli ta'lim hamda "Keys-stadi" metodlarini amaliy mashg'ulot jarayoniga tatbiq etish bosqichlari, topshiriqlar namunasi va kutilayotgan natijalar bayon qilingan.

Kalit so'zlar: Fredholm integral tenglamasi, yadro, rezolventa, Fredholm determinanti, muammoli ta'lim, keys-stadi, interfaol metod, amaliy mashg'ulot

Applying Problem-Based Learning and Case Study Methods in Teaching the Topic "Solving Integral Equations Using the Fredholm Method"

Shohida Bobojon-qizi Ne'matova
Bukhara State University

Abstract: The article discusses methodological aspects of teaching university mathematics students to solve Fredholm integral equations of the second kind by the method of Fredholm determinants (the resolvent method). Two interactive methods found to be effective for mastering this topic - problem-based learning and the case study method - are considered. The stages of their application in practical classes, sample tasks and expected learning outcomes are described.

Keywords: Fredholm integral equation, kernel, resolvent, Fredholm determinant, problem-based learning, case study, interactive method, practical class

Kirish

Integral tenglamalar nazariyasi zamonaviy matematik tahlilning muhim bo'limlaridan biri bo'lib, u fizika, mexanika, elektrotexnika, iqtisodiyot va texnika fanlarida ko'plab jarayonlarni modellashtirishda keng qo'llaniladi [2-6]. Shu bois matematika, amaliy matematika va fizika yo'nalishlarida ta'lim olayotgan talabalar

(cc) BY

uchun integral tenglamalarni yechish usullarini puxta egallash kasbiy tayyorgarlikning ajralmas qismi hisoblanadi.

Fredholm integral tenglamalari orasida ikkinchi tur tenglamalar alohida o‘rin tutadi, chunki ular uchun yechimning mavjudligi va yagonaligi haqidagi nazariya to‘liq ishlab chiqilgan. Ivar Fredholm taklif etgan determinantlar (rezolventa) usuli bu tenglamalarni ixtiyoriy uzluksiz yadro uchun yechish imkonini beradi [4-8]. Biroq pedagogik tajriba shuni ko‘rsatadiki, aynan shu mavzu talabalar uchun eng murakkab mavzulardan biri bo‘lib qoladi: ko‘p karrali integrallar, determinantlar qatori, rekurrent munosabatlar talabalarda “formulalar yig‘indisi” taassurotini qoldiradi, mohiyat esa e’tibordan chetda qoladi.

Mazkur muammoning asosiy sababi mavzuning faqat an’anaviy - ma’ruzachi tomonidan tayyor isbot va formulalarni bayon qilish shaklida o‘qitilishidir. Shu sababli mazkur maqolada mavzuni o‘qitishda talabani faol izlanuvchi holatiga keltiruvchi ikkita metod - muammoli ta’lim va “Keys-stadi” metodlarini qo‘llash yo‘llari taklif etiladi [9-20]. Ushbu metodlar mavzuning mantiqiy tuzilishiga eng mos keladi: muammoli ta’lim nazariy apparatning kelib chiqishini anglashga, keys-stadi esa uni aniq masalalarda tatbiq etishga xizmat qiladi.

1. Fredholm usulining matematik asoslari

Mavzuni o‘qitish metodikasini bayon etishdan oldin talabaga yetkazilishi lozim bo‘lgan asosiy nazariy ma’lumotlarni qisqacha keltiramiz. Ikkinchi tur Fredholm integral tenglamasi deb quyidagi ko‘rinishdagi tenglamaga aytiladi:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \quad (1)$$

bu yerda $f(x) -$ berilgan uzluksiz funksiya (ozod had), $K(x,t) -$ kvadratda uzluksiz berilgan yadro, $\lambda -$ sonli parametr, $\varphi(x) -$ izlanayotgan noma’lum funksiya. Fredholm usulining g‘oyasi shundan iboratki, (1) tenglamaning yechimi uzluksiz f uchun quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda)f(t)dt \quad (2)$$

bunda $R(x,t;\lambda)$ funksiya yadroning rezolventasi deyiladi va u ikkita yaxlit funksiyaning nisbati sifatida aniqlanadi:

$$R(x,t;\lambda) = \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)} \quad (3)$$

Surat va maxrajdagi funksiyalar λ parametri bo‘yicha darajali qatorlar orqali beriladi. Maxrajdagi $D(\lambda)$ ifoda Fredholm determinanti deb nomlanadi:

$$D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} c_n \lambda^n, c_0 = 1 \quad (4)$$

Suratdagi $D(x,t;\lambda)$ ifoda Fredholm minori deyiladi:

$$D(x,t;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x,t)\lambda^n, B_0(x,t) = K(x,t) \quad (5)$$

(cc) BY

Qatorlarning koeffitsiyentlari dastlab n-tartibli determinantlarning karrali integrallari orqali aniqlanadi, ammo amaliy hisoblashlar uchun ular quyidagi rekurrent munosabatlar yordamida ketma-ket topiladi:

$$c_n = \int_a^b B_{n-1}(t,t)dt \quad (6)$$

$$B_n(x,t) = c_n K(x,t) - n\int_a^b K(x,s)B_{n-1}(s,t)ds \quad (7)$$

Fredholm nazariyasining markaziy natijasi shundan iboratki, (4) va (5) qatorlar λ ning barcha qiymatlarida yaqinlashadi, ya'ni $D(\lambda)$ va $D(x,t;\lambda)$ butun kompleks tekislikda yaxlit funksiyalardir. Agar $D(\lambda) \neq 0$ bo'lsa, (1) tenglama har qanday uzluksiz f uchun yagona yechimga ega va u (2) formula bilan beriladi. $D(\lambda) = 0$ tenglamaning ildizlari esa yadroning xarakteristik sonlari deyiladi; aynan shu qiymatlarda bir jinsli tenglama nolga teng bo'lmagan yechimga ega bo'ladi.

2. Muammoli ta'lim metodi asosida mavzuni o'qitish

Muammoli ta'lim metodining mohiyati shundaki, o'qituvchi tayyor bilimni emas, balki ziddiyatli yoki hal etilmagan vaziyatni taqdim etadi, talabalar esa shu vaziyatni tahlil qilib, yangi bilimni o'zlari "kashf etadi".

2.1. Muammoli vaziyatni yaratish bosqichi

Mashg'ulot talabalarga tanish bo'lgan materialdan boshlanadi. O'qituvchi $[a,b]$ oraliqni n ta teng bo'lakka bo'lib, (1) tenglamadagi integralni to'g'ri to'rtburchaklar formulasi bilan almashtirishni taklif etadi. Natijada talabalar quyidagi chiziqli algebraik sistemaga keladi:

$$\varphi_i - \lambda h \sum_{j=1}^{n} K_{ij}\varphi_j = f_i, i = 1,2,\dots,n \ (8)$$

bu yerda $h = (b-a)/n$, $K_{ij} = K(x_i, x_j)$. Talabalar bu sistemani Kramer qoidasi bo'yicha yecha oladi: yechim sistema determinantining va unga mos minorlarning nisbati orqali ifodalanadi. Shu yerda o'qituvchi asosiy muammoli savolni qo'yadi: *"Agar bo'laklar soni cheksiz ortib borsa, sistema determinanti nimaga aylanadi? Chekli determinant tushunchasi cheksiz o'lchamda umuman ma'noga egami?"* Bu savol talabalarda kognitiv ziddiyat yuzaga keltiradi.

2.2. Gipotezalar ilgari surish va tekshirish bosqichi

Talabalar kichik guruhlarga bo'linib, sistema determinantini λ darajalari bo'yicha yoyishga harakat qiladi. O'qituvchining yo'naltiruvchi savollari yordamida ular determinantning λ oldidagi koeffitsiyenti diagonal elementlar yig'indisi $h\sum_i K_{ii}$ ekanini, λ^2 oldidagi koeffitsiyent esa ikkinchi tartibli minorlar yig'indisidan iborat ekanini aniqlaydi. Limitga o'tilganda yig'indilar integralga aylanadi va talabalar mustaqil ravishda quyidagi natijaga keladi:

$$c_1 = \int_a^b K(t,t)dt\,, c_2 = \int_a^b\int_a^b [K(t_1,t_1)K(t_2,t_2) - K(t_1,t_2)K(t_2,t_1)]dt_1dt_2 \quad (9)$$

Shu tariqa (4) formuladagi Fredholm determinanti talabalar tomonidan tayyor holda qabul qilinmaydi, balki chekli holatdan tabiiy umumlashtirish sifatida chiqariladi. Xuddi shu mulohaza minorlar uchun takrorlanib, (5) formulaga olib keladi.

2.3. Muammoni hal etish va natijalarni tahlil qilish bosqichi

Yakuniy bosqichda guruhlar o‘z natijalarini taqqoslaydi, o‘qituvchi umumlashtiruvchi xulosa chiqaradi va (6)-(7) rekurrent formulalarni hisoblash vositasi sifatida taqdim etadi. Metodning muhim jihati - talabalar rezolventa tushunchasini chuqur anglaydilar: ular $D(\lambda) = 0$ shartining ma’nosini chekli sistema determinantining nolga tengligi - ya’ni yechimning yagona emasligi - bilan bog‘lab tushuntira oladilar.

Muammoli ta’lim metodining afzalliklari: material mantiqiy izchillikda, kelib chiqish sabablari bilan birga o‘zlashtiriladi; talabalarda gipoteza ilgari surish va uni asoslash ko‘nikmasi rivojlanadi. Metodning cheklovi sifatida vaqt sarfining yuqoriligi va o‘qituvchidan yo‘naltiruvchi savollar tizimini oldindan puxta tayyorlashni talab qilishini ko‘rsatish mumkin.

3. “Keys-stadi” metodi asosida mavzuni o‘qitish

“Keys-stadi” (aniq vaziyatlarni tahlil qilish) metodi talabalarga real yoki realga yaqin vaziyat - keys - taqdim etilib, uni tahlil qilish, yechim variantlarini ishlab chiqish va asoslashni nazarda tutadi. Fredholm usulini o‘rganishda bu metod nazariy bilimni amaliy hisoblash ko‘nikmasiga aylantirish bosqichida qo‘llaniladi.

3.1. Keysning mazmuni

Talabalarga quyidagi vaziyat taqdim etiladi. “Mexanika laboratoriyasida bir uchidan mahkamlangan sterjenning taqsimlangan yuk ta’siridagi egilishi o‘rganilmoqda. Masalani modellashtirish natijasida jarayon quyidagi integral tenglamaga keltirildi:”

$$\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 xt\varphi(t)dt \quad (9)$$

“Laborant tenglamani λ ning turli qiymatlarida yechishi, parametrning qaysi qiymatida model buzilishini aniqlashi va natijani asoslashi kerak. Fredholm usulidan foydalanib, laborantga yordam bering.” Keys bilan birga talabalarga uchta savol beriladi: 1) rezolventani toping; 2) tenglama yechimini yozing; 3) yadroning xarakteristik sonini aniqlang va uning fizik ma’nosini izohlang.

3.2. Keysni guruhlarda tahlil qilish

Talabalar 3-4 kishilik guruhlarda ishlaydi. Dastlab yadro $K(x,t) = xt$ uchun (6)-(7) rekurrent formulalar bo‘yicha koeffitsiyentlar hisoblanadi:

$$c_1 = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} \quad (11)$$

$$B_1(x,t) = c_1 xt - \int_0^1 xs \cdot st\, ds = \frac{xt}{3} - xt \cdot \frac{1}{3} = 0 \quad (12)$$

(cc) BY

Talabalar $B_1 = 0$ bo‘lgani uchun keyingi barcha koeffitsiyentlar ham nolga teng ekanini payqaydi: $c_2 = \int_0^1 B_1(t,t)dt = 0$, va hokazo. Shunday qilib, qatorlar chekli yig‘indiga aylanadi:

$$D(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{3}, D(x,t;\lambda) = xt \ (13)$$

Rezolventa (3) formula bo‘yicha topiladi:

$$R(x,t;\lambda) = \frac{xt}{1-\frac{\lambda}{3}} = \frac{3xt}{3-\lambda} \ (14)$$

So‘ngra (2) formuladan yechim hosil qilinadi:

$$\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 \frac{3xt}{3-\lambda} \cdot t \, dt = x + \frac{\lambda x}{3-\lambda} = \frac{3x}{3-\lambda} \ (15)$$

Guruhlar natijani tekshirish uchun topilgan yechimni (10) tenglamaga qo‘yib, ayniyat hosil bo‘lishiga ishonch hosil qiladi. Uchinchi savolga javob sifatida $D(\lambda) = 0$ shartidan $\lambda = 3$ xarakteristik son topiladi va uning ma’nosi muhokama qilinadi: bu qiymatda yechim mavjud emas, ya’ni fizik model chegaraviy holatga keladi, shu bilan birga bir jinsli tenglama $\varphi(x) = Cx$ ko‘rinishidagi notrivial yechimga ega bo‘ladi.

3.3. Taqdimot va muhokama

Har bir guruh o‘z yechimini doskada himoya qiladi. O‘qituvchi muhokamani kengaytirish maqsadida qo‘shimcha savollar beradi: agar yadro $K(x,t) = x + t$ bo‘lsa, qatorlar qaysi hadda uziladi? Yadro ajralgan bo‘lmasa, rekurrent jarayonni qanday to‘xtatish mumkin? λ ning qaysi qiymatlarida yechimni ketma-ket yaqinlashishlar usuli bilan ham topish mumkin edi va Fredholm usulining afzalligi nimada?

Keys-stadi metodining afzalliklari: talabalar nazariy formulalarni aniq hisoblashda qo‘llashni o‘rganadi; masalaning amaliy konteksti motivatsiyani oshiradi; guruhda ishlash va natijani asoslash ko‘nikmalari shakllanadi. Metodning cheklovi - keyslarni tanlashda ehtiyotkorlik talab etiladi: yadro juda murakkab bo‘lsa, hisoblashlar mashg‘ulot vaqtiga sig‘maydi va metodik maqsad yo‘qoladi [15-25].

4. Ikki metodni uyg‘unlashtirish va kutilayotgan natijalar

Tavsiya etilayotgan ikki metod bir-birini to‘ldiradi va ularni ketma-ket - avval muammoli ta’lim (nazariyani kashf etish), so‘ngra keys-stadi (nazariyani tatbiq etish) - qo‘llash maqsadga muvofiq. Quyidagi jadvalda metodlarning mavzu bo‘laklariga mos ravishda taqsimlanishi va kutilayotgan natijalar keltirilgan.

Mavzu bo‘lagi	Qo‘llaniladigan metod	Kutilayotgan natija
Tenglamadan chiziqli sistemaga o‘tish	Muammoli ta’lim	Talaba diskretlash g‘oyasini va Kramer qoidasi bilan bog‘liqlikni tushunadi
Fredholm determinanti va minorining kelib chiqishi	Muammoli ta’lim	(4)-(5) qatorlar mustaqil chiqariladi, koeffitsiyentlar ma’nosi anglanadi
Rekurrent formulalar bo‘yicha hisoblash	Keys-stadi	(6)-(7) formulalar aniq yadro uchun qo‘llanadi, hisoblash ko‘nikmasi shakllanadi

(cc) BY

Rezolventa va yechimni topish	Keys-stadi	Yechim topiladi va tekshiriladi, natija asoslanadi
Xarakteristik sonlar va ularning ma'nosi	Ikkala metod	Yechimning mavjudlik shartlari fizik ma'no bilan bog'lanadi

Bunday yondashuv talabalarga mavzuni keyingi bo'limlar - ajralgan yadroli tenglamalar, Fredholm alternativasi va simmetrik yadrolar nazariyasi - bilan bog'lashda ham yordam beradi.

Xulosa

Integral tenglamalarni Fredholm usuli bilan yechish mavzusi o'z mazmuniga ko'ra yuqori abstraktlik darajasiga ega bo'lib, uni faqat an'anaviy bayon orqali o'qitish talabalarda yuzaki, formal bilim shakllanishiga olib keladi. Maqolada taklif etilgan muammoli ta'lim metodi mavzuning nazariy qismini - Fredholm determinanti, minori va rezolventasini - chekli chiziqli sistemalardan tabiiy umumlashtirish sifatida talabalar tomonidan mustaqil kashf etilishini ta'minlaydi. "Keys-stadi" metodi esa olingan nazariy bilimni aniq hisoblash va amaliy talqin qilish bosqichiga olib chiqadi, talabalarda natijani asoslash, guruhda ishlash va taqdim etish ko'nikmalarini rivojlantiradi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. U Umarova, M Boboyeva, F Mardanova. Integration of digital technologies into the educational process. AIP Conference Proceedings, 2025. 3268 (1), 060035.

2. Rasulov T. H., Sharipova M. Sh. Spectral estimates for the bounds of an operator matrix of order three // Russian Mathematics. Vol. 69, No. 6. 2025. Pp. 73-78.

3. Шарипова М. Ш. Оценки для границ одной 3 × 3 операторной матрицы // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Казань: КФУ, Т. 66. 2023. С. 295-296.

4. Rasulov T.H., Umirkulova G.H. Asymptotic expansion of Fredholm determinant associated to a family of Friedrichs models arising in quantum mechanics // Наносистемы: физика, химия, математика. - 2025. - Т. 16, № 5. - С. 586-592.

5. Umirqulova G.H., Kamolova N.M. Diskret parametrli ikkinchi tartibli operatorli matritsaga mos rezolventa operatori // Central Asian Academic Journal of Scientific Research. - 2022. - Vol. 2, № 5. - B. 589-596.

6. Rasulov T.H., Umirkulova G.H. Essential spectrum and spectral bounds of a three-particle Hamiltonian on a one-dimensional lattice // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika. - 2026. - P. 87-93.

7. Rasulov T.H., Nematova S.B. Investigation of the Number of Negative Eigenvalues of a Third-Order Operator Matrix on a Noninteger Lattice // Russian Mathematics. - 2026. - Vol. 70, № 1. - P. 86-91.

8. Неъматова Ш.Б. О свойствах определителя Фредгольма, ассоциированный с обобщенной модели Фридрихса на нецелочисленном решетке // ACTA NUUz. - 2025. - Т. 2, № 2.2. - С. 184-191.

9. Umirqulova G. Sanoqli to‘plamlar va ularning xossalari mavzusini o‘qitishda ayrim interfaol usullar // Центр научных публикаций (buxdu.uz). - 2021. - Т. 8, № 8.

10. Sharipova M. Sh. On the construction of the resolvent operator for a 3 × 3 operator matrix in Fock space // AIP Conference Proceedings. Vol. 3377, 030005, 2025.

11. Х. Р. Расулов, “О качественном анализе одного класса вольтеровских квадратично-стохастических операторов с непрерывным временем”, Матем. заметки, 116:5 (2024), 792-808.

12. X. R. Rasulov, “ On a Volterra Dynamical System of a Two-Sex Population”, Lobachevskii Journal of Mathematics, 45:8 (2024), 3975--3985.

13. X. R. Rasulov, “Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical systems with continuous time”, Communications in Mathematics, 30:1 (2022), 239-250.

14. Х. Р. Расулов, “Об аналитическом решении одного класса строго невольтерровских квадратичных стохастических операторов с непрерывным временем”, Дифференциальные уравнения, 62:3 (2026), 318-339.

15. Umarova U.U. Boomerang technology in teaching the topic “Primitive recursive functions” // Scientific progress, 2: 6 (2021), p. 890-897.

16. Umarova U.U. "How?" hierarchical diagram interactive method // Scientific progress, 2: 6 (2021), p. 855-860.

17. Umarova U.U. Technology of using the "step-by-step" method in teaching the topic "Jegalkin increases" // Scientific progress, 2: 6 (2021), p. 1639-1644.

18. Umarova U.U. “Cluster” and “PAZL” methods in teaching the topic “Collection Theory” // Scientific progress, 2: 6 (2021), p. 898-904.

19. U.U.Umarova Application of TRIZ technology to the topic "Normal forms for formulas of the algebra of statements" // Science, technology and education. 73: 9 (2020), pp. 32-35.

20. Umarova U.U. The method of "Working in small groups" in teaching the topic of logical operations on feedback // Scientific progress, 2: 6 (2021), p. 803-809.

21. Umarova U.U. Graphic organizer methods in the repetition of the section of feedback algebra // Scientific progress, 2: 6 (2021), p. 825-831.

22. Umarova U.U. “Brainstorming” and “Sase Study” methods in teaching the topic “Basic equally powerful formulas of reasoning algebra” // Scientific progress, 2: 6 (2021), p. 818-824.

(cc) BY

23. Avezov A.X. Ta’limning turli bosqichlarida innovatsion texnologiya-lardan foydalanish samaradorligini oshirish. // Science and Education" scientific journal, 2:11 (2021), c. 789-797.

24. Avezov A.X. Oliy matematika fanini o‘qitishda tabaqalash texnologiyasidan foydalanish imkoniyatlari // "Science and Education" scientific journal, 2:11 (2021), c. 778-788.

25. Avezov A.X. Умумтаълим мактаблардаги математика дарсларида ахборот технологияларини ривожлантириш тамойиллари // "Science and Education" scientific journal 2:11 (2021), c. 749-758.