"Operatorlar spektri va uning xossalari" mavzusini o'qitishda Venn diagrammasi va "5-, 6- yoki 7-si ortiqcha" metodlaridan foydalanish

Mubina Shodmonovna Sharipova
Buxoro davlat universiteti

Annotatsiya: Maqolada oliy ta'limning funksional analiz kursida "Operatorlar spektri va uning xossalari" mavzusini Venn diagrammasi va "5-si, 6-si yoki 7-si ortiqcha" interfaol topshiriqlari orqali o'qitishning ilmiy-uslubiy jihatlari yoritiladi. Normal, o'z-o'ziga qo'shma va unitar operatorlar orasidagi munosabatlarni vizual tasniflash, spektral xossalarni qiyoslash hamda noto'g'ri umumlashtirishlarni kontrmisollar bilan aniqlashga asoslangan mashg'ulot modeli taklif etiladi.

Kalit so'zlar: operator spektri, rezolventa, normal operator, o'z-o'ziga qo'shma operator, unitar operator, Venn diagrammasi, interfaol metod

Using Venn Diagrams and the "Find the Odd One Out" (5, 6, or 7 Items) Method in Teaching the Topic "The Spectrum of Operators and Its Properties"

Mubina Shodmonovna Sharipova
Bukhara State University

Abstract: This article examines the scientific and methodological aspects of teaching the topic "Spectrum of Operators and Its Properties" in a university-level Functional Analysis course through the use of Venn diagrams and interactive "Find the Odd One Out" activities involving five, six, or seven items. A teaching model is proposed that focuses on the visual classification of relationships among normal, self-adjoint, and unitary operators, the comparative analysis of spectral properties, and the identification of incorrect generalizations through counterexamples.

Keywords: operator spectrum, resolvent, normal operator, self-adjoint operator, unitary operator, Venn diagram, interactive teaching method

Funksional analizda spektr operatorlarning algebraik va analitik xossalarini o'rganishdagi muhim tushunchadir. Talabalar operator spektrini faqat xos qiymatlar to'plami deb tushunishlari yoki spektrdagi barcha sonlar haqiqiy bo'lsa, operator albatta o'z-o'ziga qo'shma bo'ladi, degan noto'g'ri xulosaga kelishlari mumkin. Venn

(cc) BY

diagrammasi bunday farqlarni ko‘rgazmali tasniflash va matematik asoslashga yordam beradi.

Venn diagrammasi operatorlar sinflari orasidagi kesishish va farqlanishni ifodalashga, “ortiqchasini top” usuli esa umumiy belgi ajratish, istisnoni asoslash va kontrmisol keltirishga xizmat qiladi [1-5]. Tadqiqotning maqsadi mazkur ikki metod uchun matematik jihatdan to‘g‘ri topshiriqlar tizimini va uni auditoriyada qo‘llash tartibini ishlab chiqishdir.

X - kompleks Banax fazosi, $A \in L(X)$ esa chegaralangan chiziqli operator bo‘lsin. Agar $A - \lambda I$ operatorining chegaralangan teskari operatori mavjud bo‘lsa, λ kompleks son A ning regulyar nuqtasi deyiladi. Bunday nuqtalar to‘plami $\rho(A)$ - rezolventa to‘plami, uning $\mathbb{C}$ dagi to‘ldiruvchisi esa spektrdir [6-8]:

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A), \rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I)^{-1} \in L(X)\}.$$

Kompleks Banax fazosidagi har qanday chegaralangan operatorning spektri bo‘sh bo‘lmagan kompakt to‘plam bo‘lib, $\sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|A\|\}$. Mazkur normaviy bahoni asoslashda $|\lambda| > \|A\|$ bo‘lganda rezolventaning quyidagi ko‘rinishidan foydalaniladi:

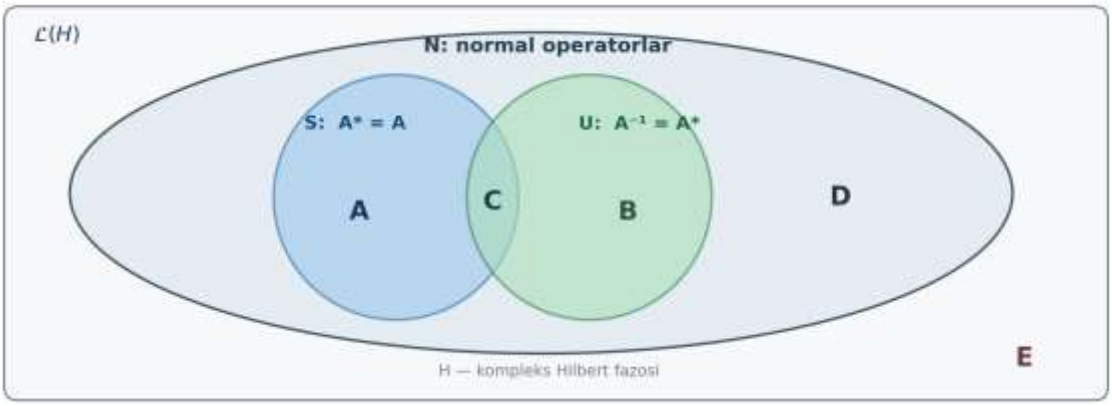
$$(A - \lambda I)^{-1} = -\lambda^{-1}(I + A/\lambda + A^2/\lambda^2 + \cdots).$$

Demak, normadan katta modulli λ lar rezolventa to‘plamiga kiradi. Chekli o‘lchamda spektr $det(A - \lambda I) = 0$ tenglamaning ildizlaridan iborat. Cheksiz o‘lchamda esa spektrda xos qiymat bo‘lmagan nuqtalar ham uchraydi. Jumladan, spektr nuqtali, uzluksiz va qoldiq qismlarga ajratilishi mumkin; bunda ularning farqi $A - \lambda I$ operatorining o‘zaro bir qiymatli bo‘lishi hamda qiymatlar sohasining zichligi bilan bog‘liq.

Hilbert fazosida $A^* = A$ bo‘lsa, $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$; $A^*A = AA^*$ bo‘lsa, A normal; $A^*A = AA^* = I$ bo‘lsa, A unitar operator deyiladi. Unitar operatorning spektri birlik aylanada yotadi. O‘z-o‘ziga qo‘shma operator uchun haqiqiy bo‘lmagan λ larda $\|(A - \lambda I)x\| \geq |Im\lambda|\|x\|$ baho spektrning haqiqiy o‘qda joylashishini izohlashga xizmat qiladi.

Venn diagrammasida o‘rganiladigan obyektlar operatorlar, doiralar esa ular qanoatlantiradigan xossalarni bildiradi. H kompleks Hilbert fazosi uchun $S = \{A \in L(H): A^* = A\}, U = \{A \in L(H): A^*A = AA^* = I\}$ va $N = \{A \in L(H): A^*A = AA^*\}$ deb belgilaymiz. $S \subseteq N$ hamda $U \subseteq N$; ammo S va U bir-birining qismi emas. Ularning kesishmasidagi operatorlar bir vaqtda o‘z-o‘ziga qo‘shma hamda unitar bo‘lib, $A^2 = I$ va $\sigma(A) \subseteq \{-1, 1\}$ shartlarini qanoatlantiradi. Diagrammada bu munosabatlar ko‘rgazmali ifodalanadi [3, 4].

(cc) BY



1-rasm. Operatorlar sinflarini Venn diagrammasida tasniflash

Talabalarga diagrammadagi A, B, C, D va E o‘rinlariga quyidagi 2×2 matritsalarni mos qo‘yish topshiriladi.

Belgi	Operator	Spektri
A	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\{-1, 2\}$
B	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\{-i, i\}$
C	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\{-1, 1\}$
D	$\begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\{2i, 3\}$
E	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\{1\}$

Yechim tahlilida A faqat S ga, B faqat U ga, C esa $S \cap U$ ga tegishli. D normal bo‘lsa-da, S va U ga kirmaydi; E esa normal emas. Har bir javob

$A^* = A$, $A^*A = I$ yoki $A^*A = AA^*$ tengliklarini tekshirish orqali asoslanadi. E matritsaning spektri haqiqiy bo‘lsa ham, u o‘z-o‘ziga qo‘shma emasligi muhim didaktik xulosadir: spektrning haqiqiyligi o‘z-o‘ziga qo‘shmalik uchun yetarli shart emas.

Diagramma bilan ishlashda talabalar avval operatorlarni mustaqil joylashtiradi, keyin juftliklarda joylashuvni isbotlaydi va yakunda xato tasniflarni muhokama qiladi. Bunda shakllar xossalarni, matritsalar esa aniq obyektlarni ifodalashi alohida ta’kidlanadi.

Tahlil uchun uchta muammoli savol qo‘yiladi: B matritsa nima uchun S da emas; D matritsa nima sababdan ikkala doiradan tashqarida, ammo N da; E ning spektri A yoki C ning spektriga o‘xshash bo‘lgani holda nega uning sinfi boshqacha? Bu savollar operatorning spektri haqidagi ma’lumot bilan uning adjungirlangan operatorga doir tengliklari bir-birining o‘rnini bosa olmasligini ko‘rsatadi.

Taklif etilgan metodika “Operatorlar spektri va uning xossalari” mavzusidagi 80 daqiqalik amaliy mashg‘ulot uchun mo‘ljallangan. Mashg‘ulot Venn diagrammasi yordamida operatorlarning spektral xossalarini tahlil qilish, ular orasidagi mantiqiy munosabatlarni aniqlash va olingan bilimlarni matematik misollar orqali

(cc) BY

mustahkamlashga asoslanadi. Bunda talabalar normal, o‘z-o‘ziga qo‘shma va unitar operatorlarning umumiy hamda farqli xususiyatlarini aniqlab, ularning o‘zaro bog‘lanishini diagrammada tasvirlaydilar.

1-jadval.

Venn diagrammasi asosida 80 daqiqalik amaliy mashg‘ulotni tashkil etish

Bosqich (vaqt)	O‘qituvchi faoliyati	Talabalar faoliyati
Tashkiliy qism va faollashtirish (10 daq.)	Spektr, rezolventa, normal, o‘z-o‘ziga qo‘shma va unitar operatorlar ta’riflarini eslatadi.	Asosiy tushunchalarni sharhlaydi va sodda misollar keltiradi.
Nazariy tayyorgarlik (15 daq.)	Operatorlar orasidagi bog‘lanishlarni tushuntiradi, Venn diagrammasini tuzish mezonlarini belgilaydi.	Operatorlarning umumiy va farqli xossalarini aniqlaydi.
Venn diagrammasini tuzish (15 daq.)	Normal, o‘z-o‘ziga qo‘shma va unitar operatorlar sinflarini diagrammada ifodalashni topshiradi.	To‘plamlar orasidagi qism-to‘plam va kesishma munosabatlarini diagrammada tasvirlaydi.
Amaliy topshiriqlar (20 daq.)	Berilgan matritsalarning operator xossalarini tekshirish va diagrammaga joylashtirishni tashkil etadi.	Matritsalarning spektrini hisoblaydi, operator tengliklarini tekshiradi va tegishli sohalarga joylashtiradi.
Natijalarni himoya qilish va muhokama (10 daq.)	Guruhlar yechimlarini solishtiradi, xatolarni tahlil qiladi va munozarani boshqaradi.	Natijalarini matematik dalillar bilan asoslaydi, boshqa guruhlarning yechimlarini tahlil qiladi.
Yakuniy baholash va refleksiya (10 daq.)	Topshiriqlarni belgilangan mezonlar asosida baholaydi, mavzuni umumlashtiradi.	Olingan natijalarni umumlashtiradi, xulosalar chiqaradi va o‘z bilimini baholaydi.
Jami: 80 daqiqa		

Amaliy topshiriqlar davomida talabalar berilgan matritsalarning normal, o‘z-o‘ziga qo‘shma yoki unitar ekanligini tekshiradilar. Buning uchun operatorlarning qo‘shmasi, ko‘paytmasi va spektral xossalaridan foydalaniladi. Olingan natijalar Venn diagrammasining tegishli sohalariga joylashtiriladi. Xususan, har bir o‘z-o‘ziga qo‘shma va unitar operatorning normal ekanligi, biroq har qanday normal operator o‘z-o‘ziga qo‘shma yoki unitar bo‘lavermasligi misollar orqali asoslanadi.

Mashg‘ulot natijalarini baholashda quyidagi mezonlardan foydalanish taklif etiladi: (1) operatorlarning asosiy xossalarini to‘g‘ri aniqlash - 2 ball; (2) spektrni hisoblash va tegishli operator tengliklarini tekshirish - 2 ball; (3) operatorlarni Venn diagrammasiga to‘g‘ri joylashtirish hamda natijalarni matematik asoslash - 2 ball. Jami 6 ball. Bunday baholash talabalarning nafaqat nazariy bilimlarini, balki ularni amaliy masalalarda qo‘llash va matematik xulosalar chiqarish ko‘nikmalarini ham hisobga oladi.

Venn diagrammasi operatorlar sinflari orasidagi mantiqiy munosabatlarni ko‘rgazmali ifodalash imkonini beradi. Ushbu metod orqali talabalar operatorlarning umumiy va xususiy xossalarini taqqoslaydilar, spektral xususiyatlar bilan operator

(cc) BY

tengliklari orasidagi bog‘lanishlarni tahlil qiladilar. Xususan, normal operator uchun spektrning haqiqiy bo‘lishi uning o‘z-o‘ziga qo‘shmaligini, spektrning birlik aylanada joylashishi esa unitarligini ta’minlashi, umumiy holda esa bu xulosalar o‘rinli bo‘lmasligi misollar yordamida tushuntiriladi. Metodning ta’lim samaradorligini aniqlash uchun kelgusida tajriba va nazorat guruhlarining natijalarini qiyosiy tahlil qilish mumkin.

“Operatorlar spektri va uning xossalari” mavzusini o‘qitishda Venn diagrammasidan foydalanishga asoslangan 80 daqiqalik amaliy mashg‘ulot modeli ishlab chiqildi. Ushbu metod normal, o‘z-o‘ziga qo‘shma va unitar operatorlar orasidagi munosabatlarni ko‘rgazmali ifodalash, ularning spektral xossalarini taqqoslash hamda nazariy bilimlarni amaliy misollar orqali mustahkamlashga yo‘naltirilgan. Venn diagrammasi asosidagi topshiriqlar talabalarning matematik tahlil qilish, mantiqiy fikrlash va olingan natijalarni asoslash ko‘nikmalarini rivojlantirish uchun xizmat qiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. U Umarova, M Boboyeva, F Mardanova. Integration of digital technologies into the educational process. AIP Conference Proceedings, 2025. 3268 (1), 060035.

2. Boboyeva, M.N. Incorporate knowledge of different professions through problem-solving in school math classes. Science and Education 2.8 (2021): 496504.

3. Boboyeva, M.N. Prospects for improving the teaching of “mathematics” in schools. Science and Education 2.8 (2021): 486-495.

4. Бобоева М.Н. Метод графического органайзера при изучении темы «Множества неотрицательных целых чисел». Проблемы науки. 63:4 (2021), С. 72-75.

5. Boboyeva M.N. Increasing creative activity of students by application of methods of analysis and synthesis in mathematics lessons. ResearchJet Journal of Analysis and Inventions. 3:05 (2022), p.67-75.

6. Rasulov T. H., Sharipova M. Sh. Spectral estimates for the bounds of an operator matrix of order three // Russian Mathematics. Vol. 69, No. 6. 2025. Pp. 73-78.

7. Sharipova M. Sh. On the construction of the resolvent operator for a 3 × 3 operator matrix in Fock space // AIP Conference Proceedings. Vol. 3377, 030005, 2025.

8. Шарипова М. Ш. Оценки для границ одной 3 × 3 операторной матрицы // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Казань: КФУ, Т. 66. 2023. С. 295-296.