Funksional fazolarda yaqinlashish va zich to‘plamlar mavzusini o‘qitishning samarali metodikasi

Gulhayo Umirqulova
Buxoro davlat universiteti

Annotatsiya: Ushbu maqolada oliy ta’lim muassasalarida funksional analiz fanining muhim mavzularidan biri hisoblangan funksional fazolarda yaqinlashish va zich to‘plamlar tushunchalarini o‘qitish metodikasi tadqiq etiladi. Mavzuning abstrakt matematik mazmunini talabalarga tushunarli yetkazish, nazariy bilimlarni amaliy misollar bilan mustahkamlash, matematik tafakkur va mustaqil tahlil qilish ko‘nikmalarini rivojlantirish masalalariga e’tibor qaratiladi. Norma bo‘yicha va kuchsiz yaqinlashish tushunchalarini taqqoslash, zich to‘plamlarni ketma-ketliklar yordamida tushuntirish, Banax va Hilbert fazolariga oid misollarni bosqichma-bosqich o‘rganish metodikasi taklif etiladi. Interfaol ta’lim, muammoli ta’lim, matematik modellashtirish va raqamli vositalardan foydalanish imkoniyatlari ham yoritiladi.

Kalit so‘zlar: funksional analiz, funksional fazo, yaqinlashish, zich to‘plam, Banax fazosi, Hilbert fazosi, norma, kuchsiz yaqinlashish, matematik kompetensiya, muammoli ta’lim, approksimatsiya

Effective methodology for teaching convergence and dense sets in function spaces

Gulhayo Umirqulova
Bukhara State University

Abstract: This article examines effective teaching methods for convergence and dense sets in functional spaces in higher mathematics education. It focuses on explaining abstract mathematical concepts through practical examples, developing students’ analytical thinking, and connecting theoretical knowledge with problem-solving activities. Methodological approaches to norm convergence, weak convergence, dense subsets, and approximation in Banach and Hilbert spaces are presented. The use of interactive learning, problem-based instruction, mathematical modelling, and digital educational tools is also discussed.

Keywords: functional analysis, functional spaces, convergence, dense sets, Banach space, Hilbert space, norm convergence, weak convergence, mathematical competence, teaching methodology

(cc) BY

Zamonaviy matematikaning muhim yo‘nalishlarini o‘qitish jarayonida, talabalarda mustaqil fikrlash, mantiqiy tahlil qilish va nazariy bilimlarni amaliy masalalarda qo‘llash kompetensiyalarini shakllantirish dolzarb pedagogik vazifalardan biridir. Ayniqsa, funksional analiz kabi abstrakt matematik tushunchalarga boy fanlarni o‘qitishda samarali metodik yondashuvlarni ishlab chiqish muhim ahamiyatga ega. Funksional analizning yaqinlashish va zich to‘plamlar nazariyasi matematik analiz, differensial va integral tenglamalar hamda operatorlar nazariyasining asoslarini tashkil etadi. Mazkur tushunchalarni o‘qitishda talabalar sonli ketma-ketliklardan metrik va normalangan fazolarga, so‘ng cheksiz o‘lchamli funksional fazolarga izchil olib borilishi lozim [1-8].

Mavzuni o‘zlashtirishdagi asosiy qiyinchilik shundaki, talabalar haqiqiy sonlar to‘plamidagi yaqinlashishni yaxshi bilgan holda ham abstrakt fazolardagi yaqinlashish turlarining farqini anglashda qiynalishi mumkin. Masalan, norma bo‘yicha yaqinlashish va kuchsiz yaqinlashish orasidagi munosabat, zich to‘plamning yopilma bilan bog‘liqligi, separabellik hamda Hilbert fazosidagi ortogonallikni yagona nazariy tizim sifatida idrok etish talab etiladi. Shu sababli o‘qitishda oddiy misollardan abstrakt fazolarga bosqichma-bosqich o‘tish, taqqoslash, muammoli savollar, grafik tasvirlar va mustaqil matematik izlanishlardan foydalanish maqsadga muvofiq. Maqolaning maqsadi funksional fazolarda yaqinlashish va zich to‘plamlar mavzusini o‘qitishning samarali metodik yondashuvlarini asoslashdan iborat.

Tadqiqot vazifalari quyidagilardan iborat: yaqinlashish tushunchalarini o‘qitishning nazariy-metodik asoslarini tahlil qilish; norma va kuchsiz yaqinlashishni taqqoslash metodikasini ishlab chiqish; zichlikni ketma-ketliklar yordamida tushuntirish; Banax va Hilbert fazolariga oid masalalarni bosqichma-bosqich o‘qitish, mustaqil topshiriqlar tizimini taklif etish.

1. Funksional analiz mavzularini o‘qitishning didaktik asoslari

Funksional analizni o‘qitishda matematik tushunchalarni izchil shakllantirish muhim didaktik talab hisoblanadi. Har bir yangi tushuncha avval o‘zlashtirilgan bilimlarga tayanishi kerak. Yaqinlashish mavzusini o‘qitishda quyidagi ketma-ketlik tavsiya etiladi:

- haqiqiy sonlar ketma-ketligining yaqinlashishi;
- metrik fazoda yaqinlashish;
- normalangan fazoda norma bo‘yicha yaqinlashish;
- funksiyalar fazosida yaqinlashish;
- kuchsiz yaqinlashish;
- zich to‘plam, yopilma va separabellik;
- Banax va Hilbert fazolarida zichlik va approksimatsiya.

Dastlab sonli ketma-ketlik uchun

$$|x_n - x| \to 0$$

(cc) BY

munosabati kiritiladi. Keyin u metrik fazoda $d(x_n, x) \to 0$, normalangan fazoda esa $\|x_n - x\| \to 0$ ko‘rinishida umumlashtiriladi. Shu yo‘l bilan talaba turli matematik obyektlarda yaqinlashishning umumiy mohiyatini anglaydi. Metodik jihatdan har bir yangi tushunchani avval sodda misol, so‘ng umumiy ta’rif, keyin teorema va mustaqil topshiriq bilan mustahkamlash tavsiya etiladi. Bu yondashuv ta’riflarni mexanik yodlashning oldini olib, tushunchalar orasidagi mantiqiy bog‘lanishni shakllantiradi.

2. Norma bo‘yicha yaqinlashishni o‘qitish metodikasi

Norma bo‘yicha yaqinlashish funksional analizning tayanch tushunchalaridan biridir. X normalangan fazoda $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo‘lsin. Agar

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

bo‘lsa, x_n ketma-ketlik x ga norma bo‘yicha yaqinlashadi deyiladi. Ta’rifning mazmunini ochishda $C[0,1]$ uzluksiz funksiyalar fazosidagi misoldan foydalanish mumkin.

$f_n(t) = \frac{t}{n}, t \in [0,1]$ funksiyalar ketma-ketligini qaraymiz.

$$\|f_n\|_\infty = \max_{0\le t\le 1} |f_n(t)| = \frac{1}{n}$$

bo‘ladi. Demak, $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty = 0$, ya’ni f_n nol funksiyaga norma bo‘yicha yaqinlashadi. Talabalar bilan maksimumning $t = 1$ nuqtada hosil bo‘lishi va $\frac{1}{n}$ ning nolga intilishi muhokama qilinadi.

Keyingi bosqichda $f_n(t) = t^n$ misoli beriladi. O‘qituvchi quyidagi savollarni qo‘yishi mumkin: norma nimani o‘lchaydi? Nima uchun maksimum $t = 1$ da olinadi? Nuqtaviy yaqinlashish norma bo‘yicha yaqinlashishni kafolatlaydimi? Qarshi misol keltiring. Bunday savollar talabalarning tayyor formulani qo‘llashdan ko‘ra, matematik vaziyatni tahlil qilishiga yordam beradi [5-16].

3. Kuchsiz yaqinlashishni taqqoslash metodi orqali o‘qitish

X normalangan fazo, X^* esa uning uzluksiz chiziqli funksionallari fazosi bo‘lsin. Agar har bir $f \in X^*$ uchun $f(x_n) \to f(x)$ bo‘lsa, x_n ketma-ketlik x ga kuchsiz yaqinlashadi deyiladi va $x_n \rightharpoonup x$ ko‘rinishida belgilanadi.

Kuchsiz yaqinlashishning mohiyati elementlarning o‘zaro normaviy masofasi nolga intilishida emas, balki barcha uzluksiz chiziqli funksionallar ta’sirida hosil bo‘ladigan sonli ketma-ketliklarning yaqinlashishidadir. Norma bo‘yicha yaqinlashish kuchsiz yaqinlashishni keltirib chiqaradi. Uzluksiz f uchun

$$|f(x_n - x)| \le \|f\| \|x_n - x\|.$$

Demak, $\|x_n - x\| \to 0$ bo‘lsa, $f(x_n) \to f(x)$ barcha $f \in X^*$ uchun bajariladi. Teskari tasdiq umumiy holda to‘g‘ri emas. Bu farqni Hilbert fazosidagi standart birlik vektorlar misoli bilan ko‘rsatish mumkin.

(cc) BY

l_2 Hilbert fazosida $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ standart birlik vektorlarni qaraymiz. Har bir n uchun $\|e_n\|_2 = 1$. Shu sababli e_n nolga norma bo‘yicha yaqinlashmaydi. Biroq ixtiyoriy $y = (y_1, y_2, \dots) \in l_2$ uchun

$$(e_n, y) = y_n \to 0$$

chunki l_2 ga tegishli har qanday ketma-ketlik koordinatalari nolga intiladi. Natijada $e_n \to 0$, lekin $\|e_n\|_2 = 1$. Mazkur misol kuchsiz yaqinlashishning norma bo‘yicha yaqinlashishdan farqini aniq ko‘rsatadi.

Taqqoslash metodi doirasida talabalar quyidagi jadvalni to‘ldiradilar:

Mezon	Norma bo‘yicha	Kuchsiz
Belgisi	$x_n \to x$	$x_n \to x$
Sharti	$\|x_n - x\| \to 0$	$f(x_n) \to f(x)$, barcha $f \in X^*$
Tekshirish	Normani baholash	Uzluksiz funksionallarni tekshirish
Munosabati	Kuchsiz yaqinlashishni keltirib chiqaradi	Umumiy holda norma yaqinlashishini bermaydi

Muammoli savol: ketma-ketlik elementlarining normasi o‘zgarmas bo‘lsa ham, qanday qilib ketma-ketlik kuchsiz ma’noda nolga yaqinlashishi mumkin? Talabalar e_n misolini tahlil qilib, javobni skalyar ko‘paytma orqali asoslaydilar.

4. Zich to‘plam tushunchasini o‘qitishning bosqichli metodikasi

Zich to‘plam tushunchasini kiritishda dastlab Q ratsional sonlar to‘plamining R haqiqiy sonlar to‘plamida zichligi misol qilib olinadi. Har qanday $x \in R$ va $\varepsilon > 0$ uchun $|x - r| < \varepsilon$ shartni qanoatlantiruvchi $r \in Q$ mavjud. Keyin bu xossa umumiy metrik fazoga ko‘chiriladi.

$A \subset X$ to‘plam X fazoda zich deyiladi, agar A ning yopilmasi butun X fazoga teng bo‘lsa:

$$\bar{A} = X.$$

Ekvivalent ravishda, har qanday $x \in X$ va $\varepsilon > 0$ uchun shunday $a \in A$ mavjud bo‘ladiki, $d(x, a) < \varepsilon$. Bu ta’rif talabalarga “istalgan aniqlikda yaqinlashtirish” g‘oyasi orqali tushuntiriladi.

Mustahkamlash uchun quyidagi topshiriqlar beriladi: Q ning R da zichligini izohlash; algebraik ko‘phadlarning $C[0,1]$ da zichligi nimani anglatishini tushuntirish; $C[0,1]$ dagi doimiy funksiyalar to‘plami zich yoki zich emasligini asoslash. Oxirgi savolda doimiy funksiyalar yopiq, lekin butun $C[0,1]$ ga teng bo‘lmagan qism fazo ekanligi ko‘rsatiladi.

Zichlikni ketma-ketliklar orqali ifodalash mavzuning nazariy mazmunini mustahkamlaydi.

$A \subset X$ to‘plam metrik X fazoda zich bo‘lishi uchun har bir $x \in X$ elementga yaqinlashuvchi $\{a_n\} \subset A$ ketma-ketlik mavjud bo‘lishi zarur va yetarli.

(cc) BY

5. Interfaol metodlar va baholash mezonlari

Mavzuni o‘zlashtirishda muammoli ta’lim, taqqoslash, kichik guruhlarda ishlash va mustaqil matematik izlanish metodlaridan foydalanish tavsiya etiladi.

Muammoli ta’limda “Agar $x_n \to x$ bo‘lsa, doimo $\|x_n - x\| \to 0$ bo‘ladimi?” savoli qo‘yiladi. Talabalar l_2 dagi e_n misolini topib, kuchsiz yaqinlashish norma bo‘yicha yaqinlashishni umumiy holda keltirib chiqarmasligini asoslaydilar.

Kichik guruhlarda ishlashda birinchi guruh norma bo‘yicha yaqinlashishga, ikkinchi guruh zich to‘plamlarga, uchinchi guruh Hilbert fazosidagi ortogonallik va zichlikka oid topshiriqlarni bajaradi. Har bir guruh yechimni doskada asoslaydi va boshqa guruhlarning savollariga javob beradi.

Mustaqil ish uchun quyidagi topshiriqlar taklif etiladi:

• $f_n(x) = \frac{x}{n}$ ketma-ketlikning C[0,1] da norma bo‘yicha yaqinlashishini isbotlang.

• $g_n(x) = x^n$ ketma-ketlikning nuqtaviy va maksimum norma bo‘yicha yaqinlashishini taqqoslang.

• Q to‘plamning R da zichligini ε orqali ta’rifdan foydalanib tushuntiring.

• l_2 fazoda standart birlik vektorlarning kuchsiz yaqinlashishini tekshiring.

Baholashda nazariy tushunchalarni bilish, matematik isbotni bajarish, amaliy masalalarni yechish va mustaqil xulosa chiqarish alohida mezonlar sifatida qaraladi.

Bunday mezonlar talabaning faqat ta’riflarni yodlash darajasini emas, balki matematik fikrlash, isbotlash va qo‘llash qobiliyatini ham baholashga xizmat qiladi [10-22].

6. Taklif etilayotgan metodik modelning samaradorligi

Taklif etilayotgan metodik yondashuv quyidagi izchillikka asoslanadi:

Bilim → Tushunish → Tahlil → Amaliyot → Mustaqil xulosa.

Birinchi bosqichda asosiy ta’rif va belgilashlar o‘zlashtiriladi. Ikkinchi bosqichda ular sodda misollar orqali izohlanadi. Uchinchi bosqichda teoremalar va isbotlar tahlil qilinadi. To‘rtinchi bosqichda talabalar amaliy masalalarni bajaradilar. Yakuniy bosqichda o‘zlashtirilgan bilimlar umumlashtirilib, yangi matematik vaziyatlarda qo‘llanadi.

Modelning metodik afzalligi abstrakt matematik tushunchalarni konkret misollar bilan bog‘lash, nazariy bilimlarni amaliy topshiriqlar orqali mustahkamlash va mustaqil izlanish ko‘nikmalarini rivojlantirishdan iborat. Uning real samaradorligini aniqlash uchun o‘quv jarayonida tajriba-sinov tashkil etish, boshlang‘ich va yakuniy natijalarni qiyosiy tahlil qilish lozim.

Xulosa

Funksional fazolarda yaqinlashish va zich to‘plamlar mavzusini o‘qitish oliy matematik ta’limda talabalarning abstrakt tafakkuri va matematik kompetensiyalarini rivojlantirishda muhim ahamiyatga ega. Maqolada mavzuni bosqichli, muammoli,

(cc) BY

taqqoslash va amaliy topshiriqlarga asoslangan metodlar orqali o‘qitish yondashuvlari bayon qilindi [22].

Norma bo‘yicha va kuchsiz yaqinlashishni taqqoslash, zichlikni ketma-ketliklar orqali tushuntirish, Hilbert fazosida ortogonallikdan foydalanish hamda raqamli vositalarni yordamchi didaktik resurs sifatida qo‘llash metodik jihatdan maqsadga muvofiq. Nazariy, amaliy va raqamli ta’lim vositalarini uyg‘unlashtirish talabalarning matematik bilimlarini chuqurlashtirish va mustaqil izlanish ko‘nikmalarini rivojlantirishga xizmat qiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Rasulov T. H., Sharipova M. Sh. Spectral estimates for the bounds of an operator matrix of order three // Russian Mathematics. Vol. 69, No. 6. 2025. Pp. 73-78.

2. Шарипова М. Ш. Оценки для границ одной 3 × 3 операторной матрицы // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Казань: КФУ, Т. 66. 2023. С. 295-296.

3. Rasulov T.H., Umirkulova G.H. Essential spectrum and spectral bounds of a three-particle Hamiltonian on a one-dimensional lattice // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika. - 2026. - P. 87-93.

4. Rasulov T.H., Nematova S.B. Investigation of the Number of Negative Eigenvalues of a Third-Order Operator Matrix on a Noninteger Lattice // Russian Mathematics. - 2026. - Vol. 70, № 1. - P. 86-91.

5. Неъматова Ш.Б. О свойствах определителя Фредгольма, ассоциированный с обобщенной модели Фридрихса на нецелочисленном решетке // ACTA NUUz. - 2025. - Т. 2, № 2.2. - С. 184-191.

6. Umirqulova G. Sanoqli to‘plamlar va ularning xossalari mavzusini o‘qitishda ayrim interfaol usullar // Центр научных публикаций (buxdu.uz). - 2021. - Т. 8, № 8.

7. Sharipova M. Sh. On the construction of the resolvent operator for a 3 × 3 operator matrix in Fock space // AIP Conference Proceedings. Vol. 3377, 030005, 2025.

8. U Umarova, M Boboyeva, F Mardanova. Integration of digital technologies into the educational process. AIP Conference Proceedings, 2025. 3268 (1), 060035.

9. Rasulov T.H., Umirkulova G.H. Essential spectrum and spectral bounds of a three-particle Hamiltonian on a one-dimensional lattice // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika. - 2026. - P. 87-93.

10. Ismoilova, D. The first and second Schur complements corresponding to 3 × 3 operator matrix in fermionic Fock space // AIP Conference Proceedings. - 2025. - Vol. 3377.

(cc) BY

11. Rasulov, T. H., Dilmurodov, E. B. On the Eigenvalues of a Soluble Model of Coupled Molecular and Nuclear Hamiltonians // Contemporary Mathematics. - 2024. - DOI: 10.37256/cm.5120242728.

12. G.H.Umirqulova. Panjaradagi uch zarrachali sistemaga mos model gamiltonianning muhim spektrining tavsifi. O'zMU xabarlari, Toshkent, 2024-y. 118-126.

13. Rasulov, T., Dilmurodov, E., Latipov, H. Spectrum and Resolvent of the Operator Matrix Associated to a System Describing at Most Four Quantum Particles on a Lattice // AIP Conference Proceedings. - 2025.

14. Umarova U.U. Boomerang technology in teaching the topic "Primitive recursive functions" // Scientific progress, 2: 6 (2021), p. 890-897.

15. Umarova U.U. "How?" hierarchical diagram interactive method // Scientific progress, 2: 6 (2021), p. 855-860.

16. Umarova U.U. Technology of using the "step-by-step" method in teaching the topic "Jegalkin increases" // Scientific progress, 2: 6 (2021), p. 1639-1644.

17. Umarova U.U. "Cluster" and "PAZL" methods in teaching the topic "Collection Theory" // Scientific progress, 2: 6 (2021), p. 898-904.

18. U.U.Umarova Application of TRIZ technology to the topic "Normal forms for formulas of the algebra of statements" // Science, technology and education. 73: 9 (2020), pp. 32-35.

19. Umarova U.U. The method of "Working in small groups" in teaching the topic of logical operations on feedback // Scientific progress, 2: 6 (2021), p. 803-809.

20. Umarova U.U. Graphic organizer methods in the repetition of the section of feedback algebra // Scientific progress, 2: 6 (2021), p. 825-831.

21. Umarova U.U. "Brainstorming" and "Sase Study" methods in teaching the topic "Basic equally powerful formulas of reasoning algebra" // Scientific progress, 2: 6 (2021), p. 818-824.

22. Умарова У.У. "Муносабатлар. Бинар муносабатлар" мавзуси бўйича маъруза ва амалий машғулотлари учун "Ажурли арра" ва "Домино" методлар // Scientific progress, 2:6 (2021), p. 982-988. "Science and Education" Scientific Journal / ISSN 2181-0842 November 2021 / Volume 2 Issue 11 www.openscience.uz 71