Trigonometrik tenglamalar va tengsizliklar yechishning ba'zi tatbiqlari

Xilola G'afurovna Xayitova
xilola_xayitova@mail.ru
Buxoro davlat universiteti

Annotatsiya: Ma'lumki, maktab matematika fanining ba'zi mavzularini o'qitishda pedagoglar uchraydigan muammolarning bir qancha yechimlari, tavsiflari o'rganilib kelinmoqda. Oliy talim va o'rta maktab hamkorligida amalga oshirilayotgan ishlar ham shular jumlasidandir. Ushbu maqolada o'rta maktab matematika fanining trigonometrik tenglamalar va tengsizliklar mavzusini o'qitishda qo'llaniladigan interfaol metodlar va ba'zi tavsiyalar keltirib o'tilgan. Mazkur mavzularni mustahkamlashga doir tushunchalar berilgan.

Kalit so'zlar: trigonometrik tenglama, trigonometrik tengsizlik, yechim, almashtirish

Some applications of solving trigonometric equations and inequalities

Khilola Gafurovna Khayitova
xilola_xayitova@mail.ru
Bukhara State University

Abstract: As you know, various solutions and descriptions of the problems that educators face when teaching certain topics in school mathematics are studied. This includes work carried out in cooperation between high and middle schools. The article presents interactive methods and some recommendations for teaching trigonometric equations and inequalities in high school mathematics. Concepts are provided to reinforce these topics.

Keywords: trigonometric equation, trigonometric inequality, solution, substitution

Ma'lumki, tenglama (tengsizlik) deyilganda, $F_1(x, y, \dots, z)$ va $F_2(x, y, \dots, z)$ funksiyalarning

$$F_1(x, y, \dots, z) = F_2(x, y, \dots, z) \ (1)$$

tengligi ($F_1 \geq F_2$ tengsizligi) tushuniladi. (1) tenglamani (tengsizlikni) har doim

$$f(x, y, \dots, z) = 0 \ (f \geq 0)$$

(cc) BY

ko‘rinishdagi tenglama (tengsizlik) bilan almashtirish mumkin.

Tenglamani (tengsizlikni) yechish deb, tenglamada (tengsizlikda) qatnashayotgan o‘zgaruvchilarning tenglamani (tengsizlikni) to‘g‘ri tenglikka (tengsizlikka) aylantiradigan qiymatlar to‘plamini topishga aytiladi. Topilgan qiymatlar to‘plami tenglamaning (tengsizlikning) yechimlar to‘plami deyiladi.

Ushbu

$$f_1(x_1, x_2, \dots., x_n) = 0 \ (2)$$

va

$$f_2(x_1, x_2, \dots., x_n) = 0 \ (3)$$

ko‘rinishdagi tenglamalar (tengsizliklar) berilgan bo‘lib, ular biror B sohada aniqlangan bo‘lsin.

Ta’rif. Agar B sohada (2) tenglamaning (tengsizlikning) yechimlar to‘plami (3) tenglamaning (tengsizlikning) yechimlar to‘plami va aksincha, (3) tenglamaning (tengsizlikning) yechimlar to‘plami (2) tenglamaning (tengsizlikning) yechimlar to‘plami bo‘lsa, u holda (2) va (3) tenglamalar (tengsizliklar) B sohada teng kuchli (ekvivalent) tenglamalar (tengsizliklar) deyiladi.

Agar $F(x, y, \dots, z, a, b, \dots, c)$ tenglamaga sodda transtendent funksiya bo‘lsa, u holda $F(x, y, \dots, z, a, b, \dots, c) = 0$ tenglama transtendent tenglama deyiladi. Trigonometriyada transtendent tenglamada qatnashayotgan o‘zgaruvchilar ustida trigonometrik va teskari trigonometrik amallar qatnashsa, u holda bunday tenglamalarni trigonometrik tenglamalar deb qaraladi. Har qanday trigonometrik tenglamalarni yechish eng sodda trigonometrik tenglamalarni yechishga keltiriladi. Bular quyidagilardir:

$$\sin x = a, \cos x = a, tgx = a, ctgx = a.$$

Bu yerda $a -$ berilgan haqiqiy son. Sinus va kosinus funksiyalarining qiymatlari $[-1,1]$ oraliqda joylashganligi sababli, dastlabki ikki tenglama faqat $|a| \leq 1$ bo‘lgandagina haqiqiy yechimga ega bo‘ladi. Tangens va kotangens funksiyalari esa o‘z aniqlanish sohalarida barcha haqiqiy qiymatlarni qabul qiladi. Trigonometrik funksiyalarning davriyligi tufayli ushbu sodda tenglamalarning har biri yechimga ega bo‘lgan hollarda cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi. Shuning uchun ularni yechishda bitta qiymatni topish bilan cheklanmasdan, barcha yechimlarni butun sonli parametr orqali ifodalash muhimdir. Agar masalada muayyan oraliq berilgan bo‘lsa, umumiy yechimlar orasidan shu oraliqqa tegishli qiymatlar ajratib olinadi.

Tenglamalar yechish jarayonida ba’zi bir shakl almashtirishlar bajariladi. Agar bunday almashtirishlar tenglamalarning teng kuchlililigiga doir teoremlarga asoslangan bo‘lsa, u holda hosil bo‘lgan tenglamaning yechimi bo‘ladi. Aks holda yechimlar tekshirilishi kerak. Trigonometrik funksiyalarning aniq bir qiymatini beradigan argumentning qiymati cheksiz ko‘p bo‘lganligi uchun tenglamaning bir xususiy yechimini olgandan so‘ng umumiy yechim formulasini hosil qilish mumkin.

(cc) BY

Tenglamani yoki tengsizlikni yechish - unda qatnashayotgan o‘zgaruvchining berilgan munosabatni to‘g‘ri sonli tenglik yoki tengsizlikka aylantiradigan barcha qiymatlarini topish demakdir. Ushbu qiymatlar birgalikda yechimlar to‘plamini tashkil etadi. Tenglamalarda yechimlar alohida sonlar yoki sonlar oilasi orqali ifodalanishi mumkin bo‘lsa, tengsizliklarda ular ko‘pincha oraliqlar va ularning birlashmasi ko‘rinishida beriladi. Biror D sohada aniqlangan quyidagi ikki tenglamani qaraylik:

$$f_1(x) = g_1(x),$$
$$f_2(x) = g_2(x).$$

Ta’rif. Agar D sohada yuqoridagi tenglamalarning yechimlar to‘plamlari o‘zaro teng bo‘lsa, ular shu sohada *teng kuchli yoki ekvivalent tenglamalar* deyiladi. Boshqacha aytganda, birinchi tenglamaning har bir yechimi ikkinchi tenglamani ham qanoatlantirishi va, aksincha, ikkinchi tenglamaning har bir yechimi birinchi tenglamaga ham yechim bo‘lishi kerak. Tengsizliklarning teng kuchliligi ham shu tartibda ta’riflanadi.

Teng kuchlilik tushunchasi yechish jarayonidagi almashtirishlarning to‘g‘riligini asoslashga xizmat qiladi. Masalan, tenglamaning ikkala tomoniga bir xil, qaralayotgan sohada aniqlangan ifodani qo‘shish teng kuchlilikni saqlaydi. Biroq o‘zgaruvchili ifodaga bo‘lishda uning nolga teng bo‘lish ehtimolini alohida tekshirish zarur. Tengsizliklarni manfiy songa ko‘paytirish yoki bo‘lishda esa tengsizlik belgisi qarama-qarshisiga almashtiriladi. Ushbu qoidalarga rioya qilmaslik ayrim yechimlarning yo‘qolishiga yoki ortiqcha yechimlar paydo bo‘lishiga olib kelishi mumkin. Noma’lum o‘zgaruvchi transsendent funksiyalar, jumladan, ko‘rsatkichli, logarifmik yoki trigonometrik funksiyalar tarkibida qatnashadigan tegishli tenglamalar transsendent tenglamalar sifatida o‘rganiladi. Xususan, noma’lum trigonometrik funksiya argumentida qatnashgan tenglama *trigonometrik tenglama* deyiladi. Bunday tenglamalarni yechishda trigonometrik ayniyatlar, funksiyalarning davriyligi va qiymatlar sohasi haqidagi bilimlar asosiy vosita hisoblanadi.

Algebraik tenglamalarga keltiriladigan tenglamalar. Bunday turga

$$f(sinx) = 0, f(cosx) = 0, f(tgx) = 0, f(ctgx) = 0$$

ko‘rinishdagi tenglamalar kiradi. Bu yerda

$$f(sinx) = 0 \sim \begin{cases} t = sinx \\ f(t) = 0 \end{cases} \sim \{sinx = t_1 \cup sinx = t_2 \cup \ldots \cup sinx = t_n\}$$

belgilash kiritish bilan (agar $f(t) = 0$ tenglama $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ildizlarga ega bo‘lsa) hosil bo‘lgan sodda tenglamalar yechilib, berilgan tenglama ildizlari hosil qilinadi.

$sinx$ va $cosx$ ga nisbatan bir jinsli bo‘lgan tenglamalar.

$$a_0(sinx)^n + a_1(sinx)^{n-1}cosx + \cdots + a_{n-1}sinx\,(cosx)^{n-1} + a_n(cosx)^n = 0 \quad (4)$$

ko‘rinishidagi tenglama (bunda $a_i \in R, i = \overline{1,n}$) $sinx, cosx$ ga nisbatan bir jinsli tenglama deb ataladi.

(cc) BY

Agar $a_0 = 0$ bo‘lsa, $cosx = 0, x_i = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in N$ sonlar berilgan tenglamani qanoatlantiradi.

Agar $a_0 \neq 0$ bo‘lsa, $cosx \neq 0$, berilgan tenglama

$$a_0(tgx)^n + a_1(tgx)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}tgx + a_n = 0 \ (5)$$

Yordamchi burchak kiritish usuli bilan yechiladigan tenglamalar. $asinx + bcosx = c$ ko‘rinishidagi tenglamani yordamchi burchak kiritish bilan yechaylik, bunda $a, b, c \neq 0$. Unga ko‘ra,

$$asinx + bcosx = c \sim \sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \varphi = arctg\frac{b}{a}.$$

Agar $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1$ yoki $c^2 \leq a^2 + b^2$ shart o‘rinli bo‘lsa, u holda berilgan tenglamaning yechimi:

$$x = -\varphi + (-1)^n arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \pi n, , \varphi = arctg\frac{b}{a}, n \in N.$$

Agar $c^2 > a^2 + b^2$ bo‘lsa, yechimi $\emptyset$.

Misol. $3sin\frac{x}{2} + \sqrt{3}cos\frac{x}{2} = 3$ tenglamani yeching.

Yechish. $3sin\frac{x}{2} + \sqrt{3}cos\frac{x}{2} = 3 \sim sin\left(\frac{x}{2} + arctg\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{3}{\sqrt{9+3}} \sim sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sim \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} = (-1)^k\frac{\pi}{3} + \pi k \sim \begin{cases} k = 2n, x = \frac{\pi}{3} + 4\pi n \\ k = 2n + 1, x = \pi + 4\pi n. \end{cases}$

Javob. $\{\pi + 4\pi n, n \in Z\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + 4\pi n, n \in Z\right\}$.

Ratsional almashtirish usuli bilan yechiladigan tenglamalar. $asinx + bcosx = c$ tenglamada

$$sinx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + \left(tg\frac{x}{2}\right)^2}$$

va

$$cosx = \frac{1 - \left(tg\frac{x}{2}\right)^2}{1 + \left(tg\frac{x}{2}\right)^2}$$

almashtirish bajarib, $tg\frac{x}{2}$ ga nisbatan kvadrat tenglamaga ega bo‘lamiz. Bu yerda, agar $c = -b$ bo‘lsa, u holda

$$x \in \left\{-2arctg\frac{b}{a} + 2\pi n, n \in Z\right\} \cup \{\pi + 2\pi n, n \in Z\}.$$

Agar $c = -b, c^2 \leq a^2 + b^2$ bo‘lsa, u holda

$$x \in \left\{arctg\frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c} + 2\pi l, l \in Z\right\},$$

(cc) BY

$a^2+b^2-c^2$ bo‘lsa, $x\in\emptyset$.

Misol. $sinx+7cosx=5$ tenglamani yeching.

Yechish.

$$sinx+7cosx=5\Rightarrow\begin{cases}sinx=\dfrac{2t}{1+t^2};\ cosx=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\\ tg\dfrac{x}{2}=t;\ 12t^2-2t-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}tg\dfrac{x}{2}=t\\ 6t^2-t-1=0\end{cases}.$$

$$tg\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\cup tg\frac{x}{2}=-\frac{1}{3}\Rightarrow x=2arctg\frac{1}{2}+2\pi n\cup x=-2arctg\frac{1}{3}+2\pi n.$$

Javob. $\left\{2arctg\frac{1}{2}+2\pi n,n\in Z\right\}\cup\left\{-2arctg\frac{1}{3}+2\pi n,n\in Z\right\}$.

Ko‘paytuvchilarga ajratish usuli bilan yechiladigan tenglamalar. $f(x)=0$ ko‘rinishdagi trigonometrik tenglama qandaydir usul bilan $f_1(x)f_2(x)f_3(x)\dots.f_n(x)=0$ ko‘rinishda keltirilgan bo‘lsin. Agar $f_1(x),f_2(x),f_3(x),\dots.,f_n(x)$ lar qandaydir M to‘plamda aniqlangan bo‘lsa, u holda shu M to‘plamda $f_1(x)f_2(x)f_3(x)\dots.f_n(x)=0$ tenglama

$$f_1(x)=0\cup f_2(x)=0\cup\dots\dots\cup f_n(x)=0$$

tenglama bilan teng kuchli bo‘ladi.

Berilgan tenglamani ko‘paytma holiga keltirish uchun algebraning ma’lum teoremalaridan foydalaniladi.

Misol. $tgxctg2xsin3x=0$ tenglamani yeching.

Yechish. $tgxctg2xsin3x=0\Leftrightarrow tgx=0\cap cosx\neq0\cup ctg2x=0\cap sin2x\neq0\cup sin3x=0\Leftrightarrow x=\pi k\cup x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\cup x=\frac{m\pi}{3}\cup x\neq\frac{l\pi}{2}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\cup x=\frac{m\pi}{3}\cap\frac{l\pi}{2}\neq\frac{m\pi}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\cup x=(3t+1)\frac{\pi}{3}\cup x=(3t-1)\frac{\pi}{3}.$$

Javob. $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},k\in Z\right\}\cup\left\{\pm\frac{\pi}{3}+\pi l,l\in Z\right\}$.

Sun’iy usullar bilan yechiladigan tenglamalar. Ayrim trigonometrik tenglamalarni yuqorida ko‘rib o‘tilgan usullar yoki oddiy shakl almashtirishlar yordamida sodda trigonometrik tenglama ko‘rinishiga keltirib bo‘lmaydi. Shuning uchun ularning har biriga alohida yechish usulini tanlash lozim bo‘ladi. Quyida ularga namunalar keltiramiz.

- Almashtirish kiritib yechiladigan tenglamalar.

$$sinx\pm cosx=t;\ sinx+cosx=t\Leftrightarrow sin2x=t^2-1;sinx-cosx=t\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow sin2x=1-t^2.$$

Misol. $2(sinx+cosx)+sin2x+1=0$ tenglamani yeching.

Yechish. $2(sinx+cosx)+sin2x+1=0\Leftrightarrow$

(cc) BY

$$\Leftrightarrow \begin{cases} sinx + cosx = t \\ 2t + (t^2 - 1) + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} sinx + cosx = t \\ t^2 + 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} sinx + cosx = t \\ t_1 = 0 \cup t_2 = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow sinx + cosx = 0 \cup sinx + cosx \neq -2 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi n \cup \emptyset.$$

Javob. $\left\{-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z\right\}$.

- Chap va o‘ng qismlarini baholash yo‘li bilan yechiladigan tenglamalar.

Misol. $3(cosx)^8 + 2(sinx)^5 = 5$ tenglamani yeching.

Yechish. $|sinx| \leq 1$ va $|cosx| \leq 1$ dan foydalanib, quyidagilarni yozish mumkin:

$$3(cosx)^8 + 2(sinx)^5 \leq 3|cosx|^8 + 2|sinx|^5 \leq 5.$$

Bu yerda tenglik belgisi $sinx = 1$ va $cosx = 1$ bo‘lgandagina o‘rinli bo‘lishi mumkin. Bu esa mumkin emas, chunki $(cosx)^2 + (sinx)^2 = 1$. Demak, berilgan tenglama yechimga ega emas.

Trigonometrik tenglamalarni yechish jarayonida odatda trigonometrik amal bajarishga to‘g‘ri keladi. Buning natijasida transsendent tenglama ratsional tenglamaga keltiriladi. Bu esa aniqlanish sohasining kengayishiga olib keladi. Ravshanki bunda chet ildzlar paydo bo‘lishi mumkin. Demak, tenglama yechilgandan so‘ng albatta yechimlar ustida tekshirish o‘tkazish kerak.

Trigonometrik tengsizliklarni yechish tenglamalarni yechishdan oz farq qiladi. Va barcha tengsizliklar oqibatda quyidagi eng sodda trgonimetrik tengsizliklarni yechishga keltiriladi:

$$sinx > a, sinx \geq a, sinx < a, sinx \leq a, cosx > a, cosx \geq a, cosx < a, cosx \leq a, tgx > a, \dots\dots$$

Bu yerda a berilgan son.

Yuqorida keltirilgan trigonometrik funksiyalar xossalari grafiklari hamda sodda trigonometrik tenglamaning yechimini topish formulalaridan foydalanib, sodda trigonometrik tengsizliklarning yechimini topish jadvalidan foydalanib topiladi. [1-5] maqolalarda matematika oid fanlarni o‘qitishda qo‘llaniladigan interfaol usullar haqida ma’lumotlar berilgan hamda metodik tavsiyalar ishlab chiqilgan. Ko‘p hollarda panjaraviy modellarning kinetik qismi trigonometrik funksiyalar yordamida qurilgan dispersiya funksiyasi bilan aniqlanadi [6-10]. Bunday modellarning muhim spektrini aniqlashda trigonometrik funksiyalar uchun mavjud tengsizliklardan foydalaniladi [11-14].

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Хайитова Х.Г. Преимущества использования метода научного исследования при решении задач комбинаторики // Научный импульс №10 (100). Часть 2, Москва 2023 г.

2. Gafurovna K. K. Some applications of the derivative of a function // Лучшие интеллектуальные исследования. - 2024. - Т. 19. - №. 3. - С. 7-12.

3. G'aybullayev Sh.M. Ta'lim sifatini ta'minlashda zamonaviy texnologiyalardan foydalanishning pedagogik xususiyatlari. // Pedagogika - ilmiy nazariy va metodik jurnal. 2024 № 6-son. B.8-12.

4. Rasulov T.H., Rasulov X.R. Methodical recommendations for teaching the department of functions with limited variability // Scientific progress 2:1 (2021), pp. 559-567.

5. Rasulov T.Kh. Innovative technologies for studying the topic of linear integral equations // Science, technology and education 73:9 (2020), pp. 74-76.

6. G'afurovna X. X. et al. Olmos panjaradagi diskret Shryodinger operatorining spektri // Journal of new century innovations. - 2023. - Т. 29. - №. 2. - С. 120-125.

7. Rasulov T.H. Investigations of the Essential Spectrum of a Hamiltonian in Fock Space // Applied Mathematics and Information Sciences, 4:3 (2010), pp. 395-412.

8. Расулов Т.Х., Дилмуродов Э.Б. Бесконечность числа собственных значений операторных (2x2)-матриц. Асимптотика дискретного спектра // Теоретическая и математическая физика 205:3 (2020), 368-390.

9. Расулов Т.Х. Асимптотика дискретного спектра одного модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке // Теоретическая и математическая физика. 163:1 (2010), С. 34-44.

10. Расулов Т.Х. О ветвях существенного спектра решетчатой модели спин-бозона с не более чем двумя фотонами // Теоретическая и математическая физика, 186:2 (2016), С. 293-310.

11. Tosheva N.A., Ismoilova D.E. The presence of specific values of the two-channel molecular-resonance model // Scientific progress. 2:1 (2021), pp. 111-120.

12. Umirkulova G.H., Bahronov B.I., Tosheva N.A., Begmurodov O.A., Akboeva N.U. Faddeev equation and its symmetric version for a three-particle lattice Hamiltonian // E3S Web of Conferences. 587 (2024), art. No. 03003.

13. Dilmurodov E.B. Discrete eigenvalues of a 2×2 operator matrix // AIP Conference Proceedings 2764:1 (2023), art. no. 030004.

14. Jurakulova F.M. Estimates for the Lower and Upper Bounds of the Essential Spectrum of a 3×3 Operator Matrix // AIP Conference Proceedings, 3377: 1 (2025), art. no. 030018.