Qat'iy novolterra operatorning uzluksiz va diskret dinamikasi: analitik yechim va limiti

Dilnura Shuhrat-qizi Yusupova
javohirahadov07@gmail.com
Buxoro davlat universiteti

Annotatsiya: Maqolada ikki o'lchovli simpleksda aniqlangan uch tipli qat'iy novolterra kvadratik stoxastik operator va unga mos tanlangan uzluksiz vaqtli oddiy differensial tenglamalar sistemasi tadqiq etilgan. O'zgaruvchilar sonini kamaytirish natijasida uchburchak tuzilishli sistema olinib, uning birinchi koordinatasi elementar funksiyalar orqali, ikkinchisi esa integrallash formulasi yordamida ifodalanadi. Yagona ichki muvozanat holat topilib, unga barcha boshlang'ich holatlardan eksponensial yaqinlashish uchun baho keltirilgan. Operatorning diskret iteratsiyasi alohida o'rganilib, muvozanatning egar nuqta bo'lishi hamda invariant kesmadan tashqaridagi trayektoriyalarning ikki davrli chegaraviy siklga yaqinlashishi isbotlangan.

Kalit so'zlar: kvadratik stoxastik operator, qat'iy novolterra sharti, simpleks, invariantlik, Koshi masalasi, analitik yechim, asimptotik turg'unlik, diskret sikl, eksponensial baho

Continuous and discrete dynamics of a strictly non-volterra operator: analytical solution and limiting states

Dilnura Shuhrat-qizi Yusupova
javohirahadov07@gmail.com
Bukhara State University

Abstract: This paper investigates a three-type strictly non-Volterra quadratic stochastic operator defined on the two-dimensional simplex and its associated continuous-time system of ordinary differential equations. By reducing the number of independent variables, a system with a triangular structure is obtained, in which the first component of the solution is expressed in terms of elementary functions, while the second is represented by an integral formula. A unique interior equilibrium is determined, and an estimate establishing exponential convergence to this equilibrium for all initial conditions in the simplex is derived. The discrete iterations of the operator are investigated separately. It is proved that the equilibrium is a saddle point and that

(cc) BY

trajectories starting outside the invariant line segment converge to a boundary cycle of period two.

Keywords: quadratic stochastic operator, strictly non-Volterra condition, simplex, invariance, Cauchy problem, analytical solution, asymptotic stability, discrete cycle, exponential estimate

KIRISH. Populyatsiya yoki boshqa ko‘p komponentli sistemaning tarkibi vaqt davomida o‘zgarishi mumkin. Komponentlarning ulushlari nomanfiy bo‘lib, ularning yig‘indisi birga teng bo‘lganida holat fazosi simpleks ko‘rinishida tasvirlanadi. Agar navbatdagi tarkib ikki komponentning juftlikdagi o‘zaro ta’siriga bog‘liq deb qaralsa, kvadratik stoxastik operator tabiiy matematik model sifatida paydo bo‘ladi. Bu operatorning diskret iteratsiyasi va u orqali qurilgan differensial tenglamaning traektoriyalari bir xil algebraik akslantirishga asoslansa-da, vaqtni hisobga olish mexanizmlari turlicha bo‘ladi.

Qat’iy novolterra sinfida juftlikning o‘zaro ta’siridan aynan shu juftlikka kiruvchi tip paydo bo‘lmaydi. Bu shart modeldagi o‘tishlar tuzilishini sezilarli darajada cheklaydi va odatiy Volterra operatorlariga xos bo‘lmagan davriy xatti-harakatga imkon beradi. Ikki o‘lchovli simpleksdagi bunday operatorlarning diskret dinamikasi Jamilov va Roziqov ishida o‘rganilgan [1]. Uzluksiz vaqtli qat’iy novolterra modellarning sifat xossalari esa Rasulov tadqiqotlarida ko‘rib chiqilgan [2, 3]. Biroq diskret operatorning qo‘zg‘almas nuqtasi bilan uzluksiz sistemaning muvozanati mos kelishi ularning turg‘unlik xossalari ham bir xil bo‘lishini anglatmaydi.

Ushbu ishning maqsadi bitta aniq operator uchun mazkur farqni umumiy mulohazalar bilan emas, balki to‘liq tekshiriladigan tenglamalar, yaqinlashish baholari va limit to‘plamlar orqali yoritishdir. Ishda dastlab tanlangan operatorning stoxastik va novolterra xossalari asoslanadi, so‘ng uzluksiz modelning analitik yechimi va global dinamikasi keltiriladi. Keyingi bosqichda ayni operatorning diskret iteratsiyasi mustaqil o‘rganilib, ikki vaqt modelining limit holatlari taqqoslanadi. Tahlilning markazida uch tipli aniq operator turadi: uning maxsus tuzilishidan foydalanib, uzluksiz oqim uchun global yaqinlashish va diskret iteratsiya uchun limit holatlarning qat’iy tasnifi birgalikda asoslanadi.

MASALANING QO‘YILISHI. Uch komponentli taqsimotlarning standart simpleksini

$$S^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_i \geq 0, \ x_1 + x_2 + x_3 = 1\} \ (1)$$

orqali belgilaymiz. Umumiy kvadratik stoxastik operator $V: S^2 \to S^2$ ning koordinatalari

$$(Vx)_k = \sum_{i,j=1}^{3} p_{ij,k}\, x_i x_j, \qquad p_{ij,k} = p_{ji,k} \geq 0, \qquad \sum_{k=1}^{3} p_{ij,k} = 1 \ (2)$$

shaklida yoziladi. Agar $p_{ij,k} = 0$ tenglik $k \in \{i, j\}$ bo‘lganda bajarilsa, operator qat’iy novolterra deb ataladi. Xususan, bir xil tipli juftlikning natijasi ham shu tip

(cc) BY

bo‘lishi mumkin emas. Uchta tip qatnashganida har xil ikkita tip juftligi uchun hosil bo‘ladigan uchinchi tip bir qiymatli aniqlanadi.

Biz quyidagi maxsus akslantirishni qaraymiz:

$$V(x_1, x_2, x_3) = ((x_2 + x_3)^2,\ 2x_1x_3,\ x_1^2 + 2x_1x_2). \quad (3)$$

Bu yerda noldan farqli koeffitsiyentlar $p_{11,3} = p_{22,1} = p_{33,1} = p_{12,3} = p_{13,2} = p_{23,1} = 1$ hamda ularning indekslar simmetriyasi bilan berilgan nusxalaridan iborat. Qolgan koeffitsiyentlar nol. Natijada operator qat’iy novolterra shartini qanoatlantiradi. Jumladan, $(1,2)$ juftligi 3-tipga, $(1,3)$ juftligi 2-tipga, $(2,3)$ juftligi esa 1-tipga o‘tadi.

Lemma 1. (3) *akslantirish S^2 simpleksni o‘ziga o‘tkazadi va qat’iy novolterra kvadratik stoxastik operatoridir.*

Isbot. (3) dagi uchala ifoda nomanfiy. Ularning yig‘indisi

$$(Vx)_1 + (Vx)_2 + (Vx)_3 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = 1. \quad (4)$$

Demak, $Vx \in S^2$. Yuqoridagi koeffitsiyentlar ro‘yxati novolterra shartini ham to‘g‘ridan-to‘g‘ri ko‘rsatadi. Lemma isbotlandi.

Ushbu operatorning diskret evolyutsiyasi $x^{(n+1)} = V\left(x^{(n)}\right)$ orqali aniqlanadi. Uzluksiz vaqt uchun esa tanlangan analog sifatida

$$\dot{x} = V(x) - x, \qquad x(0) = x^0 \in S^2, \qquad t \geq 0 \quad (5)$$

Koshi masalasini o‘rganamiz. Mazkur tanlov matematik jihatdan tabiiy bo‘lsa-da, u operatorning yagona mumkin bo‘lgan uzluksiz analogi emas. Shuningdek, (5) sistemaning $t = 1$ vaqtli oqimi, umuman olganda, V akslantirish bilan aynan mos kelmaydi. Aynan shu farq turg‘unlikni taqqoslashda muhim.

Ushbu tenglamalar sistemasi ko‘rib chiqiladi:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_2 + x_3)^2 - x_1, \\ \dot{x}_2 = 2x_1x_3 - x_2, \\ \dot{x}_3 = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_3. \end{cases} \quad (6)$$

O‘ng tomon polinomlardan tashkil topgani uchun u lokal Lipshits shartini qanoatlantiradi. Natijada har bir boshlang‘ich nuqtada Koshi masalasining lokal yechimi mavjud va yagona bo‘ladi. Bu yechimning istalgan musbat vaqtgacha davom etishini esa simpleksning invariantligi ta’minlaydi.

Teorema 1. *Har qanday $x^0 \in S^2$ uchun* (6) *sistemaning yagona yechimi barcha $t \geq 0$ da aniqlangan bo‘lib, $x(t) \in S^2$ tenglik saqlanadi. Bundan tashqari, $t > 0$ bo‘lganda yechimning barcha koordinatalari qat’iy musbatdir.*

Isbot. $s(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$ deb olsak, (6) dan $\dot{s} = s^2 - s$ kelib chiqadi. $s(0) = 1$ va skalyar tenglamaning yagonaligiga ko‘ra, $s(t) \equiv 1$. Har bir koordinata uchun

(cc) BY

$$x_i(t) = e^{-t}x_i^0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)}\left(Vx(\tau)\right)_i\, d\tau \quad (7)$$

formula o‘rinli. Nomanfiy ortant chegarasida $x_i = 0$ bo‘lsa, $\dot{x}_i = (Vx)_i \geq 0$. Shuning uchun yechim koordinatalari manfiy sohaga chiqmaydi. U kompakt S^2 da qoladi; polinom vektor maydonning lokal yechimi esa chekli musbat vaqt ichida cheksizlikka ketolmaydi. Demak, yechim barcha $t \geq 0$ uchun davom ettiriladi.

Endi qat’iy musbatlikni tekshiramiz. $x_1^0 > 0$ bo‘lsa, (7) dan $x_1(t) \geq e^{-t}x_1^0 > 0$; $x_1^0 = 0$ bo‘lsa, $x_2^0 + x_3^0 = 1$ va $\dot{x}_1(0) = 1$, shuning uchun $x_1(t) > 0$ barcha $t > 0$ da. Uchinchi tenglamaning $x_1(x_1 + 2x_2)$ manbai musbat bo‘lgani sababli (7) dan $x_3(t) > 0$; shundan keyin $2x_1x_3 > 0$ orqali $x_2(t) > 0$ olinadi. Teorema isbotlandi.

Bu xossa simpleks invariant bo‘lishidan kuchliroqdir: hatto uning uchlari va qirralaridan boshlanuvchi trayektoriyalar ham ixtiyoriy musbat vaqtda ichki sohaga kiradi. Masalan, $x_1 = 0$ chegarasida $\dot{x}_1 = 1$, $x_2 = 0$ chegarasida esa $\dot{x}_2 = 2x_1x_3 \geq 0$. Shunday qilib, alohida qirralar umumiy holda invariant emas. Bu kuzatuv sonli yechimlarni tekshirishda ham foydali: hisoblash jarayonida koordinatalarning sezilarli manfiy qiymatga o‘tishi modelning emas, sonli usulning xatosini bildiradi.

Simpleks shartidan foydalanib, $u = x_1$, $v = x_2$, $x_3 = 1 - u - v$ deb belgilaymiz. Bunda $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1 - u$ va (6) quyidagi uchburchak sistemaga keltiriladi:

$$\begin{cases} \dot{u} = u^2 - 3u + 1, \\ \dot{v} = 2u(1-u) - (1+2u)v. \end{cases} \quad (8)$$

Birinchi tenglama v ga bog‘liq emas; shuning uchun uni avval mustaqil yechib, keyin v ni integrallash mumkin. Belgilaymiz:

$$a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \qquad b = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \qquad \kappa = b - a = \sqrt{5}. \quad (9)$$

U holda $\dot{u} = (u-a)(u-b)$. $u \in [0,1]$ uchun $u - b < 0$ ekanidan $u < a$ bo‘lsa u ortishi, $u > a$ bo‘lsa kamayishi darhol ma’lum bo‘ladi. Boshlang‘ich $u(0) = u_0$ bo‘lsin. Ajratilgan o‘zgaruvchilarni integrallash natijasida

$$q = \frac{u_0 - a}{u_0 - b}, \qquad u(t) = \frac{a - bqe^{-\kappa t}}{1 - qe^{-\kappa t}} \quad (10)$$

hosil bo‘ladi. $u_0 \in [0,1]$ uchun $q < 1$, shu sababli (10) ning maxraji $t \geq 0$ da nolga teng bo‘lmaydi. $u_0 = a$ bo‘lsa, $q = 0$ va $u(t) \equiv a$ formulaga ham kiradi. Shuningdek, $t \to \infty$ da $u(t) \to a$.

Ikkinchi tenglama $u(t)$ ma’lum bo‘lganida o‘zgaruvchan koeffitsiyentli chiziqli tenglamadir. $H(t) = \int_0^t \left(1 + 2u(s)\right) ds$ deb olamiz. Integrallovchi ko‘paytuvchi usuli bilan

$$v(t) = e^{-H(t)}\left[v_0 + 2\int_0^t u\,(s)\left(1 - u(s)\right)e^{H(s)}\, ds\right],$$

(cc) BY

$$x_3(t) = 1 - u(t) - v(t) \quad (11)$$

ifodaga ega bo‘lamiz. (10) ning tuzilishidan $u - a = -\frac{d}{dt}\log(1 - qe^{-\kappa t})$ kelib chiqadi. Shuning uchun integrallovchi ko‘rsatkichni ham oshkor yozish mumkin:

$$H(t) = (1 + 2a)t - 2\log\frac{1-qe^{-\kappa t}}{1-q}. \quad (12)$$

(10)-(12) formulalar S^2 dagi istalgan boshlang‘ich holat uchun aniq integral tasvirni beradi. Bu yerda ikkinchi koordinata uchun elementar yopiq ko‘rinishni talab qilish shart emas: integral ma’lum va uzluksiz, ko‘rsatilgan integral esa har bir chekli t uchun mavjud. Yechimning nomanfiyligi va simpleksdan chiqmasligi yuqoridagi teoremadan kelib chiqadi.

Lemma 2. (8) *sistemaning birinchi koordinatasi* $u_0 < a$ *holatda qat’iy o‘suvchi,* $u_0 > a$ *holatda qat’iy kamayuvchi;* $u_0 = a$ *bo‘lsa o‘zgarmasdir. Barcha boshlang‘ich qiymatlarda* $u(t) \to a$*, bundan tashqari*,

$$|u(t) - a| \le |u_0 - a|e^{-\beta t}, \qquad \beta = b - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \quad (13)$$

Isbot. $d(t) = u(t) - a$ uchun $\dot{d} = -(b - u)d$. $0 \le u(t) \le 1$ sababli $b - u \ge b - 1 = \beta > 0$. Demak, $\frac{d}{dt}|d| \le -\beta|d|$ tengsizlik ($d \ne 0$ da, qolgan holatda uzluksizlik orqali) o‘rinli. Gronwall tengsizligi (13) ni beradi. Hosila ishorasi esa $\dot{u} = (u - a)(u - b)$ dan olinadi. Lemma isbotlandi.

Baho birinchi koordinata uchun boshlang‘ich og‘ishning o‘zini old koeffitsiyent sifatida saqlaydi; ya’ni unda noma’lum qo‘shimcha o‘zgarmas yo‘q. (10) formula esa bundan kuchliroq asimptotik tezlikni aniqlaydi: $u_0 \ne a$ bo‘lsa, $u(t) - a$ ning yetakchi hadi $e^{-\sqrt{5}t}$ tartibidadir. Bu ikki baho turli maqsadlarda ishlatiladi: biri barcha trayektoriyalar uchun sodda universal tengsizlik, ikkinchisi aniq asimptotik tuzilishdir.

Yagona muvozanat va global yaqinlashish. Muvozanatni topish uchun (8) da $\dot{u} = \dot{v} = 0$ deb olamiz. Birinchi tenglama ildizlari a va b bo‘lib, $b > 1$ joiz sohadan tashqarida. Shunday qilib, $u^\star = a$, ikkinchi tenglamadan esa $v^\star = 2a(1 - a)/(1 + 2a)$. Uchinchi koordinata simpleks shartidan topiladi:

$$x^\star = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{4\sqrt{5}-6}{11}, \frac{1+3\sqrt{5}}{22}\right) \approx (0.381966, 0.267661, 0.350373). \quad (14)$$

Koordinatalar musbat va yig‘indisi birga teng. Demak, bu nuqta simpleksning ichida yotadi va yagona muvozanat hisoblanadi. U diskret operatorning ham qo‘zg‘almas nuqtasidir, chunki $V(x^\star) = x^\star$ tenglik $V(x^\star) - x^\star = 0$ bilan aynan teng kuchli.

Kamaytirilgan sistemaning Yakobi matritsasi

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} 2u - 3 & 0 \\ 2 - 4u - 2v & -(1 + 2u) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Muvozanatdagi xos qiymatlar $\lambda_1 = -\sqrt{5}$ va $\lambda_2 = \sqrt{5} - 4$ bo‘lib, ikkalasi ham manfiy va turli. Shu sababli $x^\star$ simpleksning ikki mustaqil koordinatali dinamikasida

(cc) BY

giperbolik tortuvchi tugundir. Bu faqat lokal turg‘unlikni ko‘rsatadi; barcha boshlang‘ich holatlar uchun yaqinlashishni alohida isbotlaymiz.

Teorema 2. (6) sistemaning yagona muvozanati (14) butun S^2 simpleksda global asimptotik turg‘un. Aniqrog‘i, $u_0 = x_1^0$, $v_0 = x_2^0$, $d_0 = u_0 - a$, $w_0 = v_0 - v^\star$ belgilashlarda barcha $t \geq 0$ uchun

$$\| x(t) - x^\star \|_1 \leq \left(2|w_0| + \left[2 + \frac{4}{\beta - 1}\right]|d_0|\right) e^{-t}. \quad (16)$$

Xususan, har qanday $x^0 \in S^2$ uchun $\| x(t; x^0) - x^\star \|_1 \leq \left(4 + \frac{4}{\beta-1}\right) e^{-t}$; shuningdek har bir trayektoriyaning ω-limit to‘plami $\{x^\star\}$ dan iborat.

Isbot. $d = u - a$ va $w = v - v^\star$ orqali ikkinchi tenglamani aynan

$$\dot{w} = -(1 + 2u)w + 2d(1 - u - a - v^\star) \quad (17)$$

ko‘rinishga keltiramiz. $0 \leq u \leq 1$ va $0 < a + v^\star < 1$ bo‘lgani sababli $|1 - u - a - v^\star| \leq 1$. Shuningdek, $1 + 2u \geq 1$. Variatsiya formulasi hamda (13) ga ko‘ra,

$$|w(t)| \leq e^{-t}|w_0| + \frac{2|d_0|}{\beta - 1}\left(e^{-t} - e^{-\beta t}\right). \quad (18)$$

Chunki $x_3 - x_3^\star = -d - w$, uch koordinatadagi ℓ^1-norma $\| x - x^\star \|_1 \leq 2(|d| + |w|)$ tengsizlikni qanoatlantiradi. (13) va (18) ni birlashtirib, $e^{-\beta t} \leq e^{-t}$ ni qo‘llasak, (16) kelib chiqadi. Simpleksda $|d_0| \leq 1$ va $|w_0| \leq 1$ bo‘lgani uchun barcha boshlang‘ich qiymatlarga bir xil eksponensial majoranta topiladi. Shundan $x(t) \to x^\star$ va $\omega(x^0) = \{x^\star\}$ kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Bu isbotning asosiy afzalligi (10) dagi murakkabroq kasrli ifodadan foydalanmay, butun simpleks bo‘yicha boshlang‘ich holatga bog‘liq bo‘lmagan tezlikni ko‘rsatishidir. Olingan e^{-t} tezlik optimal deb da’vo qilinmaydi; lokal chiziqlashtirishda sekinroq so‘nuvchi mod $e^{-(4-\sqrt{5})t}$ ko‘rinishidadir. Biroq (16) barcha ruxsat etilgan boshlang‘ich nuqtalar uchun bitta formula bilan amal qiladi.

Natija 1. (6) sistemaning S^2 dagi muvozanatdan farqli davriy trayektoriyasi mavjud emas. Haqiqatan, davriy yechim (16) bo‘yicha $x^\star$ ga intilishi shart; davriylik bilan bu faqat o‘zgarmas $x(t) \equiv x^\star$ holatda mos keladi. Xususan, uzluksiz oqimda diskret iteratsiyadagi chegaraviy siklning analogi paydo bo‘lmaydi.

Endi ayni (3) operatorning $x^{(n+1)} = V\left(x^{(n)}\right)$ iteratsiyasini tekshiramiz. $u_n = x_1^{(n)}$, $v_n = x_2^{(n)}$ desak,

$$u_{n+1} = (1 - u_n)^2, \qquad v_{n+1} = 2u_n(1 - u_n - v_n), \quad n = 0,1, \ldots. \quad (19)$$

Birinchi tenglama ikkinchisiga bog‘liq emas. $g(u) = (1 - u)^2$ desak, uning $[0,1]$ dagi yagona qo‘zg‘almas nuqtasi a bo‘ladi. $g'(a) = -2(1 - a) = 1 - \sqrt{5}$, ya’ni $|g'(a)| > 1$. Shunday qilib, diskret sistemaning birinchi koordinata yo‘nalishida muvozanat itaruvchidir. Ikkinchi yo‘nalishdagi hosila $-2a = \sqrt{5} - 3$ bo‘lib, moduli birdan kichik. Demak, to‘liq ikki o‘lchovli diskret xarita uchun $x^\star$ egar turidagi qo‘zg‘almas nuqtadir; uni barcha yo‘nalishlarda itaruvchi deb atash noto‘g‘ri.

(cc) BY

Teorema 3. (19) *diskret model uchun quyidagi tasnif o'rinli: agar* $u_0 = a$ *bo'lsa, iteratsiya* $x^\star$ *ga yaqinlashadi. Agar* $u_0 \neq a$ *bo'lsa, iteratsiyaning juft va toq qismiy ketma-ketliklari* $e_1 = (1,0,0)$ *va* $e_3 = (0,0,1)$ *nuqtalardan iborat ikki davrli siklga yaqinlashadi. Aniqrog'i,* $u_0 < a$ *bo'lsa,* $x^{(2n)} \to e_3$, $x^{(2n+1)} \to e_1$; $u_0 > a$ *bo'lsa, ushbu limitlar o'rin almashadi.*

Isbot. Avval $g^2(u) - u$ ayirmani ajratamiz:

$$g\big(g(u)\big) - u = (2u - u^2)^2 - u = u(u-1)(u-a)(u-b). \quad (20)$$

g $[0,1]$ da kamayuvchi, g^2 esa o'suvchi. (20) ning ishorasidan $0 < u < a$ bo'lganda $g^2(u) < u$, $a < u < 1$ bo'lganda $g^2(u) > u$. Demak, $u_0 < a$ da $\{u_{2n}\}$ kamayuvchi va nomanfiy; uning limiti g^2 ning $0 \le u < a$ oralig'idagi yagona qo'zg'almas nuqtasi 0. Shunga mos $u_{2n+1} = g(u_{2n}) \to 1$. $u_0 > a$ bo'lsa, juft qismiy ketma-ketlik 1 ga, toq qismketma-ketlik 0 ga intiladi. Chekka boshlang'ich $u_0 = 0$ yoki $u_0 = 1$ holatlari ham ayni xulosaga kiradi.

Agar $u_{2n} \to 1$ bo'lsa, $x^{(2n)} \to e_1$, chunki qolgan koordinatalar nomanfiy va yig'indisi $1 - u_{2n} \to 0$. Shunda $x^{(2n+1)} = V\big(x^{(2n)}\big) \to V(e_1) = e_3$. Qarama-qarshi holat ham shunday isbotlanadi. Nihoyat, $u_0 = a$ da $u_n \equiv a$ va

$$v_{n+1} - v^\star = -2a(v_n - v^\star), \qquad |2a| = 3 - \sqrt{5} < 1. \quad (21)$$

Shu sababli $v_n \to v^\star$ va $x^{(n)} \to x^\star$. Teorema isbotlandi.

Teorema 3 ikki modelning farqini keskin ochib beradi. Uzluksiz oqimda har bir boshlang'ich holat ichki muvozanatga intiladi; diskret iteratsiyada esa faqat $x_1 = a$ invariant kesmasidagi boshlang'ich nuqtalar shu muvozanatga yaqinlashadi. Qolgan barcha boshlang'ich nuqtalar uchun ω-limit to'plam $\{e_1, e_3\}$ bo'ladi. Bunda dastlabki nuqta qaysi tomonda yotishi limit siklga kirishning juft-toq tartibini belgilaydi. Ushbu tasnif faqat (3) maxsus operatori uchun isbotlangan, uni barcha qat'iy novolterra operatorlariga avtomatik tatbiq qilish mumkin emas.

Diskret operatorni uzluksiz sistemaning aniq bir vaqtli oqimi deb hisoblash mumkin emasligini oddiy sonli sxema ham tushuntiradi. (5) sistemaga oshkor Eyler usulini $h > 0$ qadam bilan qo'llasak,

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + h\big(V\big(x^{(n)}\big) - x^{(n)}\big) = (1-h)x^{(n)} + hV\big(x^{(n)}\big). \quad (22)$$

$0 < h \le 1$ bo'lganda o'ng tomon ikki simpleks nuqtasining qavariq kombinatsiyasidir, demak sonli sxema simpleksni saqlaydi. $h = 1$ holatda aynan V iteratsiyasi olinadi. Biroq (22) - uzluksiz yechimning hisoblash yaqinlashishi, uning aniq vaqtli akslantirishi emas.

Natija 2. (22) sxema uchun $x^\star$ muvozanatning lokal asimptotik turg'unligi $0 < h < 2/\sqrt{5}$ da kelib chiqadi. Haqiqatan, urinma fazodagi chiziqlashtirish xos qiymatlari $1 - h\sqrt{5}$ va $1 - h\big(4 - \sqrt{5}\big)$ bo'ladi. Ularning ikkalasi ham modul bo'yicha birdan kichik bo'lishi uchun

(cc) BY

$$0 < h < \min\left\{\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{4-\sqrt{5}}\right\} = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0.894427 \quad (23)$$

shart zarur va yetarlidir. Demak, $h = 1$ da lokal turg‘unlik yo‘qoladi; yetarlicha kichik qadamda esa Eyler akslantirishi muvozanat yaqinida tortuvchi bo‘ladi. Bu natija faqat chiziqlashtirish orqali olingan lokal shartdir; undan barcha diskretlashtirilgan trayektoriyalar global yaqinlashadi, degan xulosa kelib chiqmaydi.

Taqqoslash uchun boshlang‘ich $x^0 = (0.2,0.5,0.3)$ holatni olaylik. Bu yerda $u_0 = 0.2 < a$. Uzluksiz modelda $u(t)$ (10) formula orqali monoton ravishda a ga ko‘tariladi, $v(t)$ (11) integral formula bilan hisoblanadi va butun vektor (14) muvozanatga yaqinlashadi. Diskret modelda esa dastlabki birinchi koordinata uchun $u_1 = 0.64,\ u_2 = 0.1296,\ u_3 \approx 0.757596$ bo‘lib, tebranuvchi ketma-ketlik hosil qiladi. Teorema 3 ga ko‘ra uning juft qismketma-ketligi e_3 ga, toq qismketma-ketligi e_1 ga intiladi. Demak, bir xil boshlang‘ich ulushlar va bir xil V operator ma’lumoti turli vaqt qonunlarida o‘zaro zid limit manzarasini yuzaga keltiradi.

Tekshiriladigan xossa	Uzluksiz model $\dot{x} = Vx - x$	Diskret model $x^{(n+1)} = V(x^{(n)})$
Mumkin bo‘lgan holatlar	Simpleks musbat invariant	Simpleks operator ostida invariant
Ichki muvozanat	Yagona, global tortuvchi	Yagona, egar turidagi
$x_1^0 \neq a$ holati	$x(t) \to x^\star$	$\omega(x^0) = \{e_1, e_3\}$
$x_1^0 = a$ holati	$x(t) \to x^\star$	$x^{(n)} \to x^\star$
Notrivial davriy harakat	Mavjud emas	$e_1 \leftrightarrow e_3$ sikli mavjud

Hisoblash misolining nazorat qiymatlari. Yuqorida olingan $x^0 = (0.2,0.5,0.3)$ boshlang‘ich holat uchun (8) sistemani yuqori aniqlikdagi sonli integrallash bilan ham tekshirish mumkin. Quyidagi sonlar (10)-(11) analitik tasvirga mos keladigan trayektoriya koordinatalarining yaxlitlangan qiymatlaridir; ular teoremaning isboti o‘rniga qo‘yilmaydi, faqat hisoblash natijalarini mustaqil tekshirish uchun keltiriladi.

Vaqt t	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$
0	0.200000	0.500000	0.300000
1	0.363836	0.311104	0.325061
2	0.380042	0.275332	0.344626
3	0.381761	0.268994	0.349246
4	0.381944	0.267891	0.350165
6	0.381966	0.267668	0.350366

Jadvaldan birinchi koordinataning o‘suvchi ekanligi yaqqol ko‘rinadi; ikkinchi koordinata esa bu boshlang‘ich holatda kamayadi. Biroq ikkinchi koordinataning barcha boshlang‘ich qiymatlarda bir yo‘nalishda o‘zgarishi haqida umumiy da’vo qilish mumkin emas. Haqiqatan, (8) da $\dot{v} = (1 + 2u)(\psi(u) - v)$ bo‘lib, $\psi(u) = 2u(1-u)/(1+2u)$; trayektoriya $v = \psi(u)$ chizig‘idan o‘tganida v ning o‘sish-kamayish yo‘nalishi almashishi mumkin. Bu holat u koordinataning monotonligidan

(cc) BY

barcha komponentlar monoton, degan noto‘g‘ri xulosaga kelmaslik kerakligini ko‘rsatadi.

Diskret misolda esa dastlabki bir necha had uzoq vaqtli limitni faqat taxmin qilishga yordam beradi. u_{2n} va u_{2n+1} ketma-ketliklarining haqiqiy limitlari (20) faktorizatsiya orqali qat’iy aniqlangani uchun tebranishning chegaraviy ikki siklga borishi tasodifiy sonli artefakt emas. Shu bois nazariy isbot va hisoblash misoli bir-birini to‘ldirsa-da, ularning vazifalari farqli: biri barcha mumkin bo‘lgan holatlarni qamrab oladi, ikkinchisi ma’lum boshlang‘ich nuqtaga xos dinamikani tasvirlaydi.

Bu jadval turli model tushunchalarini chalkashtirmaslik uchun keltirildi. Masalan, muvozanat nuqtasi operatorning ham, uzluksiz oqimning ham algebraik jihatdan bir xil nuqtasidir. Shunga qaramasdan, lokal xos qiymatlarning qaysi sohaga tegishli bo‘lishi - uzluksiz vaqt uchun chap yarimtekislikka, diskret vaqt uchun birlik doiraga - turli talablar qo‘yadi. Aynan shu sababli turg‘unlik xulosalarini vaqt modelini tekshirmasdan ko‘chirish mumkin emas.

Olingan hisoblarda bir nechta mantiqan farqli natijalar birgalikda ishlatildi. Birinchidan, stoxastiklik simpleksning algebraik saqlanishini beradi, lekin barcha qirralarning invariantligi bundan kelib chiqmaydi. Ikkinchidan, (6) dagi polinom vektor maydon Koshi masalasining lokal mavjudligi va yagonaligini beradi, kompakt simpleksning musbat invariantligi esa global davom ettirishga imkon yaratadi. Uchinchidan, $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ bog‘lanishidan foydalanish umumiy uch o‘zgaruvchili sistema uchun avtomatik analitik yechim emas; aynan (3) operatorning tuzilishi sababli (8) dagi birinchi tenglama mustaqil ajralib chiqdi.

To‘rtinchidan, yagona muvozanat mavjudligi va uning lokal xos qiymatlari butun simpleks bo‘yicha tortuvchanlikni o‘z-o‘zidan kafolatlamaydi. Bu ishda global natija (17) dagi aniq ayirma tenglamasi va (18) integral baho orqali mustaqil isbotlandi. Shu nuqtayi nazardan (16) tezlik bahosi nazariy hamda hisoblash nazorati uchun qulay: vaqt o‘tishi bilan hamma boshlang‘ich holatlarning muvozanat atrofida bir xil aniqlikda to‘planishi ma’lum bo‘ladi.

Beshinchidan, diskret iteratsiyada u o‘zgaruvchining yopiq rekurrent qonuni nafaqat lokal turg‘unlikni, balki butun simpleksdagi qismketma-ketlik limitlarini ham topishga xizmat qildi. Xususan, ikkilik siklning faqat mavjudligini ko‘rsatish bilan chegaralanmay, qaysi boshlang‘ich nuqtalar shu siklga borishi va qaysi nuqtalar muvozanatga intilishi ajratib berildi. Bu farq o‘quv va tadqiqot amaliyotida muhim: bir nechta sonli grafik yordamida taxmin qilish o‘rniga limit hodisasi algebraik tengsizlik va monoton qismketma-ketliklar bilan isbotlandi.

Natijalarning tatbiq doirasi ham aniq belgilangan. Tahlil faqat (3) orqali berilgan uch tipli qat’iy novolterra operatorga hamda $\dot{x} = V(x) - x$ tanlangan uzluksiz analogga tegishlidir. Operatorning koeffitsiyentlari o‘zgarsa, (8) dagi uchburchak tuzilish, (14) muvozanat yoki diskret ikki davrli sikl saqlanishi shart emas. Shuningdek,

(cc) BY

berilgan populyatsion talqin qat'iy biologik eksperiment bilan tekshirilmaganligi sababli xulosalar, avvalo, nazariy matematik modelning dinamik xossalariga taalluqlidir.

XULOSA. Maqolada ikki o'lchovli simpleksda aniqlangan aniq qat'iy novolterra kvadratik stoxastik operatorning uzluksiz va diskret vaqtli dinamikasi bir xil algebraik asosda tekshirildi. Uzluksiz model uchun Koshi masalasi barcha musbat vaqtlar bo'yicha to'g'ri qo'yilgani, simpleks musbat invariantligi va chekka nuqtalardan chiqqan yechimlar ixtiyoriy musbat vaqtda ichki sohaga o'tishi asoslandi. Ikki mustaqil koordinataga o'tish orqali analitik yechimning oshkor va integral tasvirlari hosil qilindi.

Sistemaning yagona ichki muvozanati aniq topildi. Uning lokal tortuvchanligi Yakobi matritsasi orqali, global asimptotik turg'unligi esa boshlang'ich shartlar bo'yicha bir tekis eksponensial baho yordamida ko'rsatildi. Buning natijasida uzluksiz modelda muvozanatdan farqli davriy orbitalar bo'lmasligi kelib chiqdi. Diskret model uchun esa muvozanat egar nuqta ekanligi va maxsus invariant kesmadan tashqaridagi barcha trayektoriyalar ikki davrli chegara sikliga yaqinlashishi isbotlandi. Shuningdek, Eyler usulining qadamiga qarab lokal turg'unlik almashishi aniq ifodalandi. Shunday qilib, bir operator bilan bog'langan diskret va uzluksiz jarayonlarda muvozanatlarning mos kelishi ularning uzoq vaqtli dinamikasi bir xil bo'lishiga yetarli emasligi qat'iy matematik misolda ko'rsatildi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения, Москва, Физматлит, 1974 г., 331 с.

2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений, Москва, Физматлит, 2015 г., 473 с.

3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Москва, Физматлит, 2015 г., 584 с.

4. Малкин И.Г., Теория устойчивости движения, Наука, М., 1966.

5. Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова, Мир, М., 1964.

6. Салохитдинов М.С., Расулов Х.Р. (1996). Задача Коши для одного квазилинейного вырождающегося уравнения гиперболического типа // ДАН Республики Узбекистан, №4, с.3-7.

7. Rasulov H. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10 (2019), p.35-38.

8. X. R. Rasulov: On the analytical solution of a class of strictly non-volterra quadratic stochastic operators with continuous time, Differ. Equat., 2026, vol. 63, no. 3, pp. 318-339.

9. Расулов Х.Р. Аналог задачи Трикоми для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2022. Т. 26, № 4.

10. Xaydar Raupovich Rasulov. Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation with mixed type. AIP Conf. Proc. 2781, 020016 (2023)

11. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.

12. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.

13. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1-11.

14. Rasulov Kh.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.

15. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики, № 53:2 (2021), с. 7-10.

16. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // Scientific progress, 2:2 (2021), p.870-879.

17. Расулов Х.Р. (1996). Задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №12, с.12-16.

18. Исломов Б., Расулов Х.Р. (1997). Существование обобщенных решений краевой задачи для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №7, с.5-9.

19. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, с. 197-199.

20. Расулов Х.Р., Джуракулова Ф.М. Об одной динамической системе с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с. 19-22.

21. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. О существовании обобщенного решения краевой задачи для нелинейного уравнения смешанного типа // Вестник науки и образования, 97:19-1 (2020), С. 6-9.

22. Raupovich, R. X., & kizi, R. M. H. (2023). General Algorithm on Fuzzy Subclasses of K-Valued Logic for Some Issues. European Journal of Higher Education and Academic Advancement, 1(2), 212-215.

23. X. R. Rasulov; Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical systems with continuous time, Commun. Math., 30(1) (2022), 239-250.

24. X. R. Rasulov; On a Volterra Dynamical System of a Two-Sex Population, Lobachevskii J Math, 45 (2024), 3975-3985.

25. X. R. Rasulov; On the Qualitative Analysis of a Class of Volterra Quadratic Stochastic Operators with Continuous Time, Math Notes, 116 (2024), 1080-1093.

26. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. О некоторых вольтерровских квадратичных стохастических операторах двуполой популяции с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с.23-26.

27. Rasulov X.R. Sayfullayeva Sh.Sh. Buzilish chizig'iga ega bo'lgan elliptik tipdagi tenglamalar uchun qo'yiladigan chegaraviy masalalar haqida // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), p.46-54.