Jukovskiy akslantirishining xossalarini o‘rgatishda Venn diagrammasi metodidan foydalanish

Shonazar Mirboboyevich G‘aybullayev
shonazargaybullayev5@mail.com
Buxoro davlat universiteti

Annotatsiya: Maqolada Jukovskiy akslantirishini o‘rgatishda Venn diagrammasining didaktik imkoniyatlari yoritiladi. Akslantirishning matematik xossalari (kritik nuqtalar, ikki tarmoqli teskari akslantirish, aylana va nurlarning konfokal ellips va giperbolalarga o‘tishi, kritik nuqta atrofida burchaklarning ikki baravar kattalashishi) isbotlari bilan bayon qilinadi. $w = z$, $w = \frac{1}{z}$ va $w = z + \frac{1}{z}$ akslantirishlarini taqqoslash jadvali, Venn diagrammasining yetti sohasi mazmuni, yettita masala yechimlari, 80 daqiqalik mashg‘ulot modeli, baholash mezonlari va uch darajali mustaqil ish topshiriqlari taklif etiladi. Shular orqali talabalarning mantiqiy fikrlash, matematik dalillash hamda bilimlarni tizimlashtirish ko‘nikmalarini rivojlantirish yo‘llari asoslanadi.

Kalit so‘zlar: Jukovskiy akslantirishi, kompleks analiz, Venn diagrammasi, konform akslantirish, kritik nuqta, konfokal ellipslar, aerodinamik profil, matematik ta’lim, interfaol metod

Using the Venn diagram method in teaching the properties of the Joukowsky map

Shonazar Mirboboyevich Gaybullayev
shonazargaybullayev5@mail.com
Bukhara State University

Abstract: This paper highlights the didactic potential of the Venn diagram in teaching the Joukowsky mapping. The mathematical properties of the mapping are presented with proofs: its critical points, the two-branched inverse mapping, the transformation of circles and rays into confocal ellipses and hyperbolas, and the doubling of angles in a neighborhood of a critical point. The thesis offers a comparison table of the mappings $w = z$, $w = \frac{1}{z}$ and $w = z + \frac{1}{z}$, a description of the content of the seven regions of the Venn diagram, solutions to seven problems, an 80-minute lesson model, assessment criteria, and three-level independent work assignments. On this

(cc) BY

basis, it substantiates ways of developing students' logical thinking, mathematical reasoning and knowledge systematization skills.

Keywords: Joukowsky mapping, complex analysis, Venn diagram, conformal mapping, critical point, confocal ellipses, airfoil, mathematics education, interactive method

KIRISH. Kompleks analizni o‘rganishda analitik formula, hosila va geometrik obraz o‘rtasidagi bog‘lanishni anglash muhim didaktik vazifadir. Xususan, talaba funksiyaning golomorfligi, lokal konformligi va global bir qiymatliligi bir xil tushunchalar emasligini ajrata olishi lozim. Jukovskiy akslantirishi bu farqlarni o‘rganish uchun qulay misol: u sodda ratsional formula bilan ifodalansa-da, kritik nuqtalar, o‘zaro teskari nuqtalarning bir xil obrazga ega bo‘lishi va aylananing kesmaga o‘tishi kabi mazmunli xususiyatlarga ega [1-4].

Akslantirish N.E.Jukovskiy nomi bilan bog‘liq. XX asr boshida u aylana atrofidagi tekis potensial oqimni shu akslantirish yordamida qanot profili atrofidagi oqimga o‘tkazgan. Natijada qanotning ko‘tarish kuchini hisoblash mumkin bo‘lgan, bu natija hozir Kutta-Jukovskiy teoremasi nomi bilan ma’lum. Shunday qilib, Jukovskiy akslantirishi konform akslantirishlar nazariyasida, tekis potensial oqimlarni modellashtirishda va aerodinamik profillarni hosil qilishning nazariy modellarida qo'llaniladi [5]. Talaba uchun bu misol abstrakt formulaning amaliy ma'nosini ko‘rsatadi.

Mashg‘ulotlarda bir xil xatolar takrorlanadi. Talabalar «J golomorf, demak, o‘zaro bir qiymatli» yoki «$J'(z) \neq 0$, demak, global injektiv» deb xulosa qiladi. Birlik aylananing obrazi ham aylana bo‘ladi deb taxmin qilinadi, holbuki u $[-2, 2]$ kesmaga «yassilanadi». Teskari akslantirishni tuzishda kvadrat ildizning ikki qiymati hisobga olinmaydi. Bu xatolarning umumiy sababi shundaki, lokal xossa (bitta nuqta atrofida) va global xossa (butun sohada) bir-biridan ajratilmaydi.

Formulalarni hisoblash bilan cheklanish lokal va global xossalar chalkashishiga olib kelishi mumkin. Venn diagrammasi esa ularni dalillar bilan taqqoslashga yordam beradi: har bir xossa diagrammaning faqat bitta sohasiga joylashadi va uning o‘rni isbot bilan asoslanadi [6]. Maqolaning maqsadi Jukovskiy akslantirishini $w = z$ hamda $w = \frac{1}{z}$ akslantirishlari bilan qiyoslash asosida metodik model ishlab chiqishdir. Vazifalar: xossalarni asoslash, diagramma sohalarini to‘ldirish, masalalar tizimini tuzish va baholash mezonlarini belgilash. [7-10] maqolada ta’lim jarayonida pedagogik texnologiyalarni qo‘llanilishi o‘z aksini topgan. [11-15] maqolalarda panjaraviy model operatorlarning asosiy spektral xossalari Fredgolm determinanti deb ataluvchi analitik funksiya yordamida tadqiq qilingan. [16-20] maqolalarda esa umumlashgan Fridrixs modelining xos qiymatlari yordamida operatorli matritsaning spektri batafsil o‘rganilgan.

(cc) BY

ASOSIY QISM. 1. Jukovskiy akslantirishining matematik mohiyati. Jukovskiy akslantirishi kompleks tekislikning noldan boshqa nuqtalarida aniqlangan J : $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ funksiya bo'lib, quyidagi formula orqali beriladi:

$$w = J(z) = z + \frac{1}{z},\ z \neq 0.$$

J(z) = J(1/z) tenglik barcha $z \neq 0$ uchun o'rinli. Aniqrog‘i, a, b ≠ 0 bo‘lganda

$$J(a) - J(b) = (a - b) + (1/a - 1/b) = (a - b)(1 - 1/(ab)) = (a - b)(ab - 1)/(ab),$$

shuning uchun J(a) = J(b) tenglikdan (a − b)(ab − 1) = 0, ya'ni a = b yoki ab = 1 kelib chiqadi. Demak, J funksiyaning o‘zi bir qiymatli aniqlangan, ammo butun $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ da injektiv emas; uning teskari bog‘lanishi ikki tarmoqli:

$$z^2 - wz + 1 = 0,\ z = (w \pm \sqrt{(w^2 - 4)})/2.$$

Viyet teoremasiga ko‘ra ikki proobrazning ko‘paytmasi $z_1z_2 = 1$. Demak, $w \neq \pm 2$ bo‘lganda bitta proobraz birlik doira ichida, ikkinchisi tashqarisida yotadi yoki ikkalasi ham birlik aylanada joylashadi. Masalan, w = 5/2 uchun z = (5/2 ± 3/2)/2, ya'ni z = 2 yoki z = 1/2.

Hosila $J'(z) = 1 - 1/z^2$ bo'lib, J′(z) = 0 tenglama z = ±1 nuqtalarni beradi. Bu kritik nuqtalarda J(1) = 2, J(−1) = −2; J bu nuqtalarda lokal konform emas. Kritik nuqta atrofida nima bo‘lishini quyidagi ayniyat ko'rsatadi:

$$J(z) - 2 = (z - 1)^2/z,\ J(z) + 2 = (z + 1)^2/z.$$

z = 1 yaqinida $J(z) - 2 \approx (z - 1)^2$, shuning uchun z = 1 nuqtadan chiquvchi ikki egri chiziq orasidagi burchak obrazda ikki baravar kattalashadi. Aynan shu xossa Jukovskiy profilida o'tkir chiqish qirrasini (dum uchini) hosil qiladi. Boshqa har bir $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, 1\}$ nuqtada J golomorf va hosilasi noldan farqli, demak, lokal konform. Lokal konformlik global injektivlikni anglatmaydi.

$z = re^{i\theta}$ (r > 0) deb olsak, J(z) = (r + 1/r)cos θ + i(r − 1/r)sin θ bo'ladi. w = u + iv deb belgilab, u = (r + 1/r)cos θ va v = (r − 1/r)sin θ tengliklarini olamiz. r = 1 da $J(e^{i\theta})$ = 2cos θ va birlik aylananing obrazi [−2, 2] kesma; kesmaning har bir ichki nuqtasi ikki marta (θ va −θ uchun) qoplanadi. r ≠ 1 da θ ni yo'qotib,

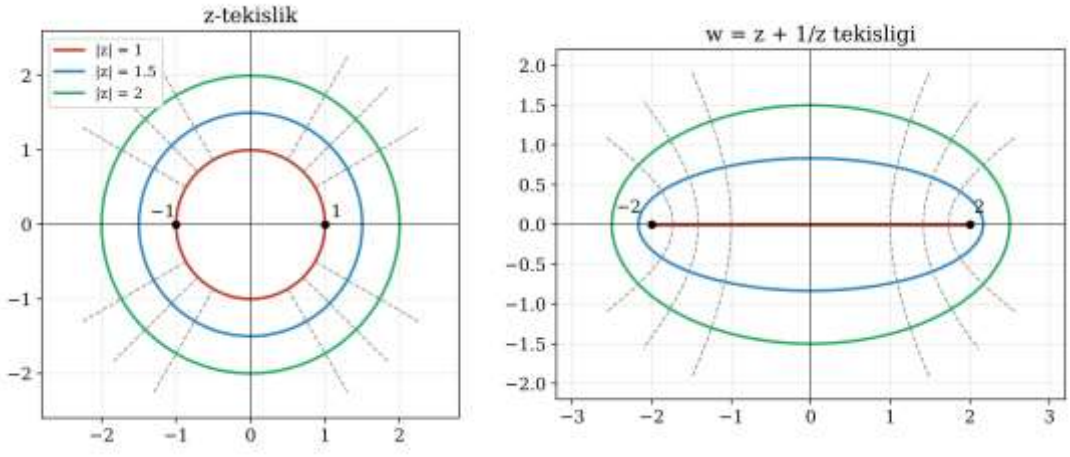
$$u^2/(r + 1/r)^2 + v^2/(r - 1/r)^2 = 1$$

tenglamani hosil qilamiz, ya'ni |z| = r aylana yarim o'qlari r + 1/r va |r − 1/r| bo‘lgan ellipsga akslanadi. Fokuslar orasidagi masofani hisoblaymiz: $c^2 = (r + 1/r)^2 - (r - 1/r)^2 = 4$, bundan c = 2. Demak, barcha ellipslarning fokuslari bir xil, ±2 nuqtalarda: ular konfokal. Xuddi shunday, arg z = θ nuri ($\theta \neq k\pi/2$) uchun r ni yo‘qotsak,

$$u^2/(4\cos^2\theta) - v^2/(4\sin^2\theta) = 1$$

giperbola tarmog‘i hosil bo‘ladi; uning fokuslari ham ±2. Aylanalar va nurlar z-tekislikda o‘zaro perpendikulyar bo‘lgani uchun, konformlik tufayli ularning obrazlari (ellipslar va giperbolalar) ham perpendikulyar kesishadi. 2-rasmda bu manzara r = 1; 1,5; 2 aylanalar va bir nechta nur uchun ko‘rsatilgan [4].

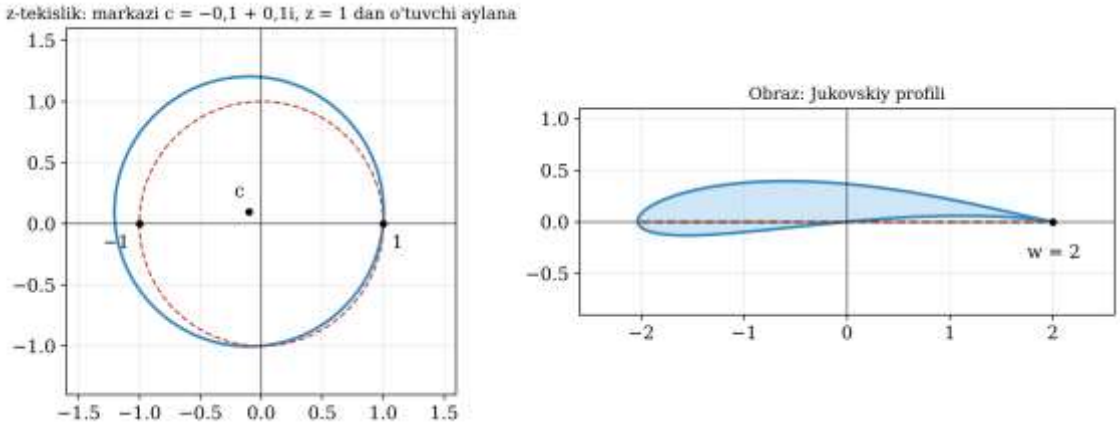
(cc) BY



2-rasm. Aylanalar konfokal ellipslarga, nurlar (shtrix chiziqlar) konfokal giperbolalarga o‘tadi; birlik aylana [−2, 2] kesmaga yassilanadi.

Bundan tashqari, J tashqi $D_1 = \{z : |z| > 1\}$ sohani ham, teshib qo‘yilgan ichki $D_2 = \{z : 0 < |z| < 1\}$ sohani ham alohida-alohida $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ sohaga o‘zaro bir qiymatli konform akslantiradi; ikkala soha birgalikda olinsa, obrazlar ustma-ust tushadi. D_1 dagi injektivlikning isboti qisqa: a, b ∈ D_1 bo'lsa |ab| > 1, demak, ab = 1 bo'lishi mumkin emas va J(a) = J(b) dan a = b kelib chiqadi [1; 3].

Akslantirishning fizik ma’nosini ham ko‘rsatish mumkin. Tezligi V bo‘lgan bir jinsli oqim birlik radiusli silindrni aylanib o‘tganda, oqimning kompleks potensiali $F(z) = V(z + 1/z) = V \cdot J(z)$ ko‘rinishida bo‘ladi [2]. Oqim chiziqlari Im F(z) = const tenglama bilan aniqlanadi. Birlik aylanada $\operatorname{Im} J(e^{i\theta}) = 0$, ya’ni silindr sirti oqim chizig‘i bo‘ladi va suyuqlik uni kesib o‘tmaydi. Cheksizlikda $F(z) \approx Vz$, ya’ni oqim bir jinsli. Demak, Jukovskiy akslantirishining o‘zi aylana atrofidagi oqimni tavsiflaydi, uni boshqa konform akslantirish bilan birga qo'llash esa murakkabroq shakllar atrofidagi oqimni topishga imkon beradi.



3-rasm. Markazi c = −0,1 + 0,1i bo‘lgan va z = 1 dan o‘tuvchi aylananing Jukovskiy akslantirishidagi obrazi.

Endi markazi c nuqtada bo‘lgan va z = 1 kritik nuqtadan o‘tuvchi, −1 nuqtani o‘z ichiga oluvchi aylanani qaraymiz. Uning obrazi z = 1 ga mos w = 2 nuqtada o‘tkir uchga ega yopiq egri chiziq bo‘ladi. Bu Jukovskiy profili deb ataladi (3-rasm). c

(cc) BY

haqiqiy o‘qda yotsa, profil simmetrik, c ning mavhum qismi musbat bo‘lsa, profil egilgan (qavariq-botiq) shaklga ega bo‘ladi.

2. Venn diagrammasi va taqqoslash mezonlari

Venn diagrammasi o‘ziga xos va umumiy xossalarni tegishli sohalar hamda kesishmalarda ifodalaydi. Diagramma ingliz mantiqchisi J. Venn tomonidan mulohazalarni tasvirlash vositasi sifatida taklif qilingan [6]. Ta’limda u ikki yoki uch obyektni solishtirish uchun qo‘llanadi: har bir obyektga bitta oval mos keladi, kesishmalarga umumiy xossalar yoziladi. Uch obyektli diagrammada yetti soha bor va har biri aniq mantiqiy ma’noga ega, bu matematika darsi uchun qulay.

Ushbu matnda I(z) = z, R(z) = $\frac{1}{z}$va J(z) = z + $\frac{1}{z}$ tanlanadi. Tanlov tasodifiy emas: J = I + R, ya’ni Jukovskiy akslantirishi qolgan ikkitasining yig‘indisi. Talaba yig‘indi qo‘shiluvchilarning qaysi xossalarini meros qilib olishini, qaysilarini yo‘qotishini tekshiradi. Ularning tabiiy aniqlanish sohalari mos ravishda $\mathbb{C}$, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ va $\mathbb{C} \setminus \{0\}$; hosilalari $I'(z) = 1$, $R'(z) = -1/z^2$, $J'(z) = 1 - 1/z^2$. I hamda R o‘z sohalarida injektiv; J esa global injektiv emas. Diagrammani to‘ldirishdan oldin talabalar 1-jadvaldagi taqqoslash jadvalini tuzadi.

1-jadval

Uch akslantirishning taqqoslash jadvali

Xossa	I(z) = z	R(z) = 1/z	J(z) = z + 1/z
Aniqlanish sohasi	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C} \setminus \{0\}$	$\mathbb{C} \setminus \{0\}$
Hosila	1	$-1/z^2$	$1 - 1/z^2$
Kritik nuqtalar	yo‘q	yo‘q	±1
$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ da injektivlik	ha	ha	yo'q: J(z) = J(1/z)
Birlik aylana obrazi	o‘zi	o‘zi	[−2, 2] kesma
|z| = 2 aylana obrazi	|w| = 2 aylana	|w| = 1/2 aylana	ellips, yarim o‘qlari 5/2 va 3/2
$z \to \infty$ da	$w \to \infty$	$w \to 0$	$w \to \infty$
z = 0 nuqta	aniqlangan	oddiy qutb	oddiy qutb

Jadvaldagi har bir qator diagrammaning bitta sohasiga o‘tkaziladi. Masalan, «kritik nuqtalar bor» xossasi faqat J ustunida «ha» bo‘lgani uchun C sohasiga, «z = 0 da oddiy qutb» esa R va J ustunlarida bo‘lgani uchun F sohasiga yoziladi. Uchta qoplanadigan ellipsdagi A-G belgilar xossalarni ifodalaydi (1-rasm).

A (faqat I): butun $\mathbb{C}$ da golomorf, z = 0 da aniqlangan; $I'(z) = 1$.

B (faqat R): $|z| > 1$ va $0 < |z| < 1$ sohalari o'rin almashadi; $R'(z) = -1/z^2$.

C (faqat J): kritik nuqtalari ±1; birlik aylanani [−2, 2] kesmaga o‘tkazadi; $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ da injektiv emas.

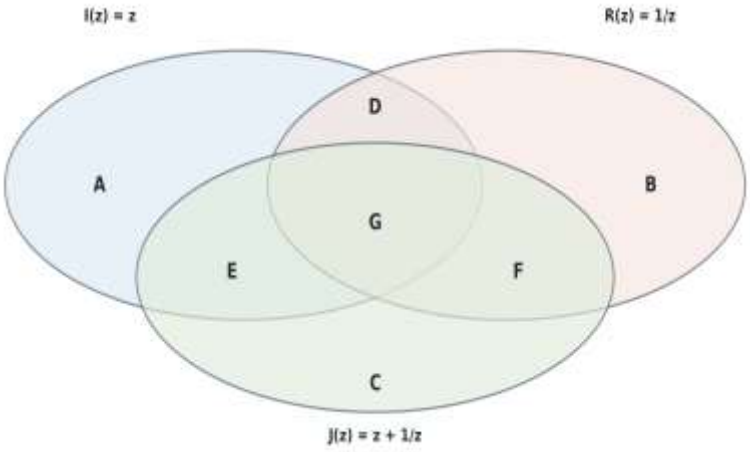
D = I ∩ R: injektiv; hosilalar nol emas; birlik aylana o‘ziga akslanadi.

E = I ∩ J: $|z| \to \infty$ da akslantirish moduli cheksiz kattalashadi.

F = R ∩ J: z = 0 da oddiy qutbga ega va aniqlanmagan.

G = I ∩ R ∩ J: $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ da golomorf; $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, 1\}$ da barchasi lokal konform.

(cc) BY



1-rasm. Uch akslantirish xossalarining Venn diagrammasidagi joylashuvi.

Diagrammadagi xossalar dalillanadi; golomorflik global injektivlikni anglatmaydi. Har bir soha uchun dalil qisqa bo‘lishi mumkin, lekin u bo'lishi shart. Masalan, B sohasidagi xossa uchun $|1/z| = 1/|z|$ tengligi yetarli: $|z| > 1$ bo'lsa, $|1/z| < 1$. E sohasi uchun $|J(z)| \geq |z| - 1/|z|$ bahosi keltiriladi: $|z| \to \infty$ da o‘ng tomon cheksizlikka intiladi. D sohasidagi «birlik aylana o‘ziga akslanadi» xossasi R uchun $|z| = 1 \Rightarrow |1/z| = 1$ tengligidan kelib chiqadi; J da esa bu xossa bajarilmaydi, shuning uchun u D da qoladi, G ga o‘tmaydi.

Diagramma bilan ishlashda bo‘sh soha ham ma’lumot beradi. Agar guruh qandaydir sohaga xossa topa olmasa, o‘qituvchi «Bu soha haqiqatan bo‘shmi yoki xossa hali topilmadimi?» deb so‘raydi. Talabalar odatda shundan keyin yangi xossani qo‘shadi; masalan, E sohasiga «haqiqiy o'qni haqiqiy o'qqa o‘tkazadi» xossasini taklif qilishadi va bu xossa aslida uchala akslantirishga ham tegishli, ya’ni G ga o‘tishi kerakligini aniqlashadi.

3. Masalalar tizimi va ularning yechimlari

Masalalar diagramma sohalaridagi xossalarni hisoblash orqali tekshirish uchun tuzilgan. Ularning dastlabki ikkitasi asosiy mashg'ulotda, qolganlari amaliy darsda va mustaqil ishda yechiladi.

1-masala (lokal konformlik va global injektivlik). $J(2)$ va $J(1/2)$ ni, $J'(2)$ va $J'(1/2)$ ni hisoblang. Yechim: $J(2) = 2 + 1/2 = 5/2$ va $J(1/2) = 1/2 + 2 = 5/2$; lekin $J'(2) = 1 - 1/4 = 3/4$, $J'(1/2) = 1 - 4 = -3$. Ikki turli nuqtaning obrazi bir xil, lekin hosilalar nol emas: global injektivlik va lokal konformlik turli xossalardir. Bu masala C sohasidagi «injektiv emas» va G sohasidagi «lokal konform» xossalarini birga tasdiqlaydi.

2-masala (aylana obrazi). $|z| = 1$ va $|z| = 2$ aylanalarning obrazlarini toping. Yechim: $|z| = 2$ uchun $J(2e^{i\theta}) = (5/2)\cos\theta + (3/2)i\sin\theta$, ya'ni yarim o‘qlari 5/2 va 3/2 bo'lgan ellipsga o‘tadi; uning fokuslari $\pm\sqrt{(25/4 - 9/4)} = \pm 2$. $|z| = 1$ esa $[-2, 2]$ kesmaga o'tadi. Qo‘shimcha savol: $|z| = 1/2$ aylana obrazi qanday? Javob: o‘sha ellips, chunki $J(z) = J(1/z)$.

(cc) BY

3-masala (nur obrazi). arg z = π/4 nurining obrazini toping. Yechim: $z = re^{i\pi/4}$ uchun u = (r + 1/r)·(√2/2), v = (r − 1/r)·(√2/2). U holda $u^2 - v^2 = ½[(r + 1/r)^2 - (r - 1/r)^2] = ½·4 = 2$. Demak, nur $u^2 - v^2 = 2$ giperbolaning o‘ng tarmog'iga (u > 0) o‘tadi. $a^2 = b^2 = 2$ bo‘lgani uchun $c^2 = 4$, ya’ni fokuslar yana ±2. Talaba bu natijani 2-rasm bilan solishtiradi va ellips bilan giperbolaning perpendikulyar kesishishini konformlik bilan izohlaydi.

4-masala (kritik nuqtada burchak). z = 1 nuqtadan gorizontal z = 1 + t va vertikal z = 1 + it (t > 0 kichik) yo‘nalishda chiquvchi ikki kesma qanday obrazga ega? Yechim: $J(z) - 2 = (z - 1)^2/z$ ayniyatidan $J(1 + t) - 2 = t^2/(1 + t) > 0$, ya’ni obraz w = 2 dan o‘ngga yo‘naladi; $J(1 + it) - 2 = -t^2/(1 + it) \approx -t^2$, ya’ni obraz chapga yo‘naladi. Kesmalar orasidagi 90° burchak 180° ga aylandi. Xulosa: kritik nuqtada burchaklar saqlanmaydi, ikki baravar kattalashadi. Bu masala C sohasidagi «kritik nuqtalar ±1» xossasining geometrik ma’nosini ochadi.

5-masala (teskari obraz). w = 0 va w = 2i nuqtalarning proobrazlarini toping. Yechim: w = 0 da $z^2 + 1 = 0$, z = ±i; ikkalasi birlik aylanada yotadi va haqiqatan J(i) = i + 1/i = i − i = 0. w = 2i da $z^2 - 2iz + 1 = 0$, $z = (2i \pm \sqrt{(-8)})/2 = i(1 \pm \sqrt{2})$. Ikkala proobrazning ko‘paytmasi $i(1 + \sqrt{2})\cdot i(1 - \sqrt{2}) = -(1 - 2) = 1$, ularning modullari $\sqrt{2} + 1 > 1$ va $\sqrt{2} - 1 < 1$. Xulosa: bitta proobraz D_1 da, ikkinchisi D_2 da; bu J ning har bir sohada alohida injektivligini tasdiqlaydi.

6-masala (Jukovskiy profili). Markazi c = −0,1 nuqtada bo‘lgan va z = 1 dan o‘tuvchi aylananing obrazini sifat jihatdan tavsiflang. Yechim: aylana radiusi 1,1, u −1 nuqtani ichiga oladi (masofa 0,9 < 1,1). z = 1 kritik nuqta bo‘lgani uchun obrazda w = 2 nuqtada o'tkir uch hosil bo'ladi (4-masalaga qarang); c haqiqiy bo'lgani uchun aylana haqiqiy o'qqa nisbatan simmetrik, obraz ham simmetrik. Natijada simmetrik qanot (rul) profili hosil bo'ladi. c ga kichik musbat mavhum qism qo'shilsa, 3-rasmdagi egilgan profil olinadi. Bu masala amaliy tatbiqni ko‘rsatadi va C sohasini mazmunan boyitadi.

7-masala (yuqori yarim tekislik). D_1 ning yuqori yarmi {|z| > 1, Im z > 0} qayerga akslanadi? Yechim: $z = re^{i\theta}$, r > 1, $0 < \theta < \pi$ bo'lsa, $v = (r - 1/r)\sin\theta > 0$, ya'ni obraz yuqori yarim tekislikda yotadi. Teskari yo'nalish: Im w > 0 bo'lgan har bir w uchun ikki proobrazning biri D_1 da yotadi, va $\text{Im } J(z) = (r - 1/r)\sin\theta > 0$ bo'lgani uchun u yuqori yarim tekislikda. Demak, yuqori yarim halqasimon soha yuqori yarim tekislikka o'zaro bir qiymatli konform akslanadi. Xulosa: soha to'g'ri tanlansa, J injektiv bo'ladi; injektivlik akslantirishning emas, «akslantirish + soha» juftligining xossasi. Bu fikr Venn diagrammasidagi C sohasini aniqlashtiradi: «$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ da injektiv emas» deb yozishda soha ko'rsatilishi shart.

Masalalar va ular tasdiqlaydigan diagramma sohalari 2-jadvalda keltirilgan.

(cc) BY

2-jadval

Masalalar va Venn diagrammasi sohalarining bog'lanishi

Masala	Diagramma sohasi	Tekshiriladigan g'oya
1. J(2) va J(1/2)	C, G	Lokal konformlik global injektivlikni bermaydi
2. $\|z\| = 1$, $\|z\| = 2$ obrazi	C, D	Aylana → kesma yoki ellips; konfokallik
3. arg $z = \pi/4$ obrazi	C, G	Nur → giperbola; konformlik va ortogonallik
4. $z = 1$ da burchak	C	Kritik nuqtada burchak ikki baravarlanadi
5. $w = 0$, $w = 2i$ proobrazlari	C	Ikki tarmoqli teskari akslantirish, $z_1z_2 = 1$
6. Jukovskiy profili	C	Amaliy tatbiq: o'tkir dum uchi
7. Yuqori yarim soha	C, G	Injektivlik sohaga bog'liq

4. Dars mashg‘ulotining amaliy modeli

Mashg‘ulot maqsadi uch akslantirishning sohalari, hosilalari, kritik nuqtalari va geometrik obrazlarini aniqlab, ularni Venn diagrammasida asosli qiyoslashdir. 80 daqiqalik dars 3-jadvalda ko‘rsatilgandek tashkil etiladi.

3-jadval

Mashg‘ulot bosqichlari (80 daqiqa)

Bosqich, vaqt	Mazmuni	Ish shakli va natija
1. Individual ish (10 daqiqa)	Uch akslantirishning sohalari va hosilalarini yozish; golomorflik, konformlik va injektivlikni farqlash	Individual; 1-jadvalning birinchi uch qatori
2. Mezon tanlash (15 daqiqa)	Kritik nuqtalar, aylana obrazi va teskari obrazga doir savollar tuzish	Guruhlarda; taqqoslash mezonlari ro'yxati
3. Guruhli diagramma (20 daqiqa)	A-G sohalarga xossalar va dalillarni joylashtirish	Hisoblovchi, tekshiruvchi va taqdimotchi rollari; to'ldirilgan diagramma
4. Masala va munozara (25 daqiqa)	J(2) va J(1/2) ni solishtirish, $\|z\| = 1$ hamda $\|z\| = 2$ obrazlarini topish	Guruhlararo; lokal konformlik injektivlikdan ajratiladi
5. Umumlashtirish (10 daqiqa)	Diagrammalarni tekshirish; kritik nuqtalar va tashqi soha obraziga doir xulosa	Individual yozma xulosa

Uchinchi bosqichda rollar quyidagicha taqsimlanadi. Hisoblovchi xossani formula bilan tekshiradi, tekshiruvchi uni qarshi misolga sinaydi, taqdimotchi esa guruh natijasini boshqalarga tushuntiradi va savollarga javob beradi. Rollar keyingi mashg'ulotda almashtiriladi, shunda har bir talaba uchala vazifani ham bajaradi.

To'rtinchi bosqichda guruhlar o'z diagrammalarini almashtirib tekshiradi. Bir guruhning diagrammasida xatolik topilsa (masalan, «injektiv» xossasi G sohasiga yozilgan bo'lsa), tekshiruvchi guruh qarshi misol keltirishi kerak; bu holda $J(2) = J(1/2)$ yetarli. Shu tariqa munozara fikr almashishdan dalil almashishga aylanadi.

Amaliy mashg'ulot 3-7-masalalarga bag'ishlanadi. 3- va 4-masalalar juftlikda, 5-masala individual, 6-masala kichik guruhlarda bajariladi. 6-masalada GeoGebra yoki boshqa dinamik dasturda aylana markazini siljitib, profil shakli qanday o'zgarishini

(cc) BY

kuzatish foydali; lekin kompyuter tasviri dalilning o'rnini bosmaydi, har bir kuzatish formula bilan tushuntiriladi.

5. Metodik samaradorlik va baholash tavsiyalari

Metodning didaktik qiymati har bir kesishmaga matematik dalil keltirishida. Darsni sodda I va R dan boshlab, J ga o'tish tavsiya etiladi. «J golomorf, demak, injektiv» hamda «$J'(z) \neq 0$, demak, global bir qiymatli» kabi xatolar qarshi misollar bilan rad etiladi. Aylana va ellips tasvirlari formulalar bilan bog'lanadi. Talabalar ko'p yo'l qo'yadigan xatolar va ularni tuzatish usullari 4-jadvalda umumlashtirilgan.

4-jadval

Tipik xatolar va ularni tuzatish

Xato	Qarshi misol yoki dalil	Diagramma sohasi
«J golomorf, demak, injektiv»	$J(2) = J(1/2) = 5/2$	C
«$J'(z) \neq 0$ bo'lsa, J global bir qiymatli»	$J'(2) \neq 0$, $J'(1/2) \neq 0$, lekin obrazlar teng	C, G
«Birlik aylana aylanaga o'tadi»	$J(e^{i\theta}) = 2\cos\theta$ haqiqiy son	C, D
«Teskari akslantirish bitta»	$w = 5/2$ uchun $z = 2$ va $z = 1/2$	C
«Kritik nuqtada ham burchak saqlanadi»	$J(z) - 2 = (z-1)^2/z$, burchak ikki baravarlanadi	C

Baholash uchun 10 ballik mezon tavsiya etiladi (5-jadval). Individual javoblar ham tekshiriladi; natija yechimlar aniqligi va dalillar bilan baholanadi.

5-jadval

Baholash mezonlari (jami 10 ball)

Mezon	Ball	Ko'rsatkich
Aniqlanish sohasi va hosilalar	2	Uch akslantirish uchun to'g'ri yozilgan
Kritik nuqtalar va konformlikni asoslash	2	$J'(z) = 0$ yechilgan, lokal konformlik izohlangan
Venn diagrammasidagi A-G sohalarning to'g'ri mazmuni	3	Har bir xossa to'g'ri sohada, dalili bilan
Amaliy masalaning yechimi	2	Hisob to'g'ri, geometrik tasvir bilan tekshirilgan
Guruhdagi asosli muloqot	1	Boshqa guruh xulosasini dalil yoki qarshi misol bilan baholaydi

Mustaqil ish topshiriqlari uch darajada beriladi.

A daraja. 1) $J(3)$, $J(1/3)$, $J(i)$, $J(-2)$ ni hisoblang. Javob: $10/3$; $10/3$; 0; $-5/2$. 2) $J'(i)$ ni toping va J ning $z = i$ nuqtada lokal konformligini asoslang. Javob: $J'(i) = 1 - 1/i^2 = 2 \neq 0$.

B daraja. 1) $|z| = 3$ aylananing obrazini toping va fokuslarini tekshiring. Javob: yarim o'qlari $10/3$ va $8/3$ bo'lgan ellips; $c^2 = 100/9 - 64/9 = 4$, fokuslar ± 2. 2) $w = -5/2$ ning proobrazlarini toping. Javob: $z^2 + (5/2)z + 1 = 0$, $z = -2$ yoki $z = -1/2$.

C daraja. 1) J ning $D_1 = \{|z| > 1\}$ sohada injektiv ekanini isbotlang. Yechim g'oyasi: $J(a) = J(b)$ dan $a = b$ yoki $ab = 1$; $a, b \in D_1$ uchun $|ab| > 1$, demak, faqat $a = b$ qoladi. 2) Musbat mavhum yarim o'q $\{it : t > 0\}$ ning obrazini toping. Yechim: $J(it) =$

(cc) BY

it + 1/(it) = i(t − 1/t). t − 1/t funksiya (0, ∞) da qat'iy o'sadi va −∞ dan +∞ gacha barcha qiymatlarni qabul qiladi, shuning uchun yarim o'q butun mavhum o'qqa o'zaro bir qiymatli akslanadi. Qo'shimcha savol: bu J ning injektiv emasligiga zid emasmi? (Yo'q: it va 1/(it) = −i/t turli yarim o'qlarda yotadi.)

Mashg'ulot oxirida talabalar refleksiya uchun uchta savolga yozma javob beradi: «Diagrammaning qaysi sohasini to'ldirish eng qiyin bo'ldi va nima uchun?», «Dars boshida J haqida qaysi fikringiz noto'g'ri edi?», «Lokal konformlik bilan global injektivlik farqini bitta misol bilan tushuntiring». Javoblar keyingi mashg'ulotni rejalashtirishda ishlatiladi. Guruhlar to'ldirgan diagrammalar ham tahlil qilinadi: qaysi sohada xato ko'p bo'lsa, o'sha xossa keyingi darsda qayta ko'rib chiqiladi.

Venn diagrammasi metodining cheklovlarini ham hisobga olish kerak. Uch obyektdan ortiq taqqoslashda diagramma o'qilishi qiyinlashadi, shuning uchun to'rtinchi akslantirish (masalan, $w = z^2$) qo'shilsa, taqqoslash jadvalidan foydalanish qulayroq. Diagramma isbotni almashtirmaydi, faqat isbotlanishi kerak bo'lgan tasdiqlarni tartibga soladi. Natijani baholash uchun oldingi va keyingi qisqa topshiriqlarni solishtirish mumkin, biroq ushbu tezisda empirik samaradorlik haqidagi statistik da'volar keltirilmaydi.

XULOSA. Venn diagrammasi Jukovskiy akslantirishining xossalarini qiyoslash va matematik dalillashga yordam beradi. J = I + R bo'lgani uchun w = z va w = 1/z bilan taqqoslash tabiiy: talaba yig'indi qo'shiluvchilarning qaysi xossalarini saqlashini (golomorflik, cheksizlikdagi o'sish, nolda qutb) va qaysilarini yo'qotishini (global injektivlik, kritik nuqtalarning yo'qligi) o'zi aniqlaydi.

Kesishmalarni asoslash lokal konformlikni global injektivlikdan farqlashga, talabalarning mustaqil fikrlash hamda bilimlarni tizimlashtirish ko'nikmalarini rivojlantirishga yordam beradi. Konfokal ellips va giperbolalar, kritik nuqtada burchakning ikki baravarlanishi va Jukovskiy profiliga oid masalalar diagrammadagi abstrakt xossalarni geometrik va amaliy mazmun bilan to'ldiradi. Metodni individual va guruhli topshiriqlar, taqqoslash jadvali va uch darajali mustaqil ish bilan uyg'unlashtirish tavsiya etiladi. Modelning samaradorligini tajriba-sinov orqali tekshirish keyingi tadqiqot vazifasidir.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. 1. Функции одного переменного. - М.: Наука, 1985.

2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1973.

3. Ahlfors L. V. Complex Analysis. - 3rd ed. - New York: McGraw-Hill, 1979.

4. Needham T. Visual Complex Analysis. - Oxford: Oxford University Press, 1997.

(cc) BY

5. Anderson J. D. Fundamentals of Aerodynamics. - New York: McGraw-Hill, 1984.

6. Venn J. On the Diagrammatic and Mechanical Representation of Propositions and Reasonings // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. - 1880. - Vol. 10, No. 59. - P. 1-18.

7. G'aybullayev Sh.M. Ta'lim sifatini ta'minlashda zamonaviy texnologiya-lardan foydalanishning pedagogik xususiyatlari. // Pedagogika - ilmiy nazariy va metodik jurnal. 2024 № 6-son. B.8-12.

8. T.H.Rasulov, X.R.Rasulov. Methodical recommendations for teaching the department of functions with limited variability // Scientific progress 2:1 (2021), pp. 559-567.

9. Хайитова Х.Г. Использование эвристического метода при объяснении темы «Непрерывные линейные операторы» по предмету «Функциональный анализ» // Вестник науки и образования. 94:16, 2020. Часть 2. С. 25-28.

10. Хайитова Х.Г. Преимущества использовании метода анализа при изучении темы «Непрерывные функции» по предмету «Математический анализ» // Проблемы педагогики, 2021 № 2(53). С. 46-49.

11. T.Kh.Rasulov. Asymptotics of the discrete spectrum of a model operator associated with the system of three particles on a lattice // Theoretical and Mathematical Physics, 163:1 (2010), pp. 429-437.

12. Т.Х.Расулов. Исследование спектра одного модельного оператора в пространстве Фока // Теорет. и математическая физика, 5:3 (2009), С. 327-342.

13. T.H.Rasulov. Investigations of the Essential Spectrum of a Hamiltonian in Fock Space // Applied Mathematics and Information Sciences, 4:3 (2010), pp. 395-412.

14. Т.Х.Расулов. О ветвях существенного спектра решетчатой модели спин-бозона с не более чем двумя фотонами // Теоретическая и математическая физика, 186:2 (2016), С. 293-310.

15. Т.Х.Расулов, Э.Б.Дилмуродов. Бесконечность числа собственных значений операторных (2x2)-матриц. Асимптотика дискретного спектра // Теоретическая и математическая физика 205:3 (2020), 368-390.

16. T.H.Rasulov, E.B.Dilmurodov. Essential spectrum of a 2x2 operator matrix and the Faddeev equation // European science 51:2 (2020), pp.7-10.

17. S.N.Lakaev, T.Kh.Rasulov. Efimov's effect in a model of perturbation theory of the essential spectrum // Funct. Analysis and its Applications 37:1 (2003), pp. 69-71.

18. Т.Х.Расулов. О числе собственных значений одного матричного оператора // Сибирский математический журнал. 52:2 (2011), С. 400-415.

19. Хайитова Х.Г. О числе собственных значений модели Фридрихса с двухмерным возмущением. Наука, техника и образование. 2020. № 8 (72), 5-8.

20. Xayitova X.G., Ramazonova Sh.Sh. Panjaradagi ikki o'lchamli qo'zg'alishga ega bilaplasian operatorining spektri va rezolventasi // Science and education. Vol. 3 No. 3 (2022), 55-64.