O‘lchovli funksiyalar ustida amallarni o‘rgatishda klaster metodidan foydalanishning didaktik imkoniyatlari

Feruza Yadgarovna Mardanova
f.y.mardanova@buxdu.uz
Buxoro davlat universiteti

Annotatsiya: Ushbu ishda o’lchovli funksiyalar ustida amallarni o’rgatishda klaster metodining didaktik imkoniyatlari yoritiladi. O’lchovlilikning teng kuchli ta’riflari, yig’indi, ko’paytma, bo’linma, modul, maksimum va ketma-ketlik limiti uchun o’lchovlilik saqlanishining shartlari va isbot g’oyalari ko’rib chiqiladi. Talabalar ko’p yo’l qo’yadigan xatolar jadvali, yettita matematik misol to’liq yechimi bilan, 80 daqiqalik mashg’ulot bosqichlari, baholash mezonlari va uch darajali mustaqil ish topshiriqlari taklif etiladi. Shular orqali talabalarning mustaqil fikrlashini rivojlantirish yo’llari asoslanadi.

Kalit so‘zlar: o‘lchovli funksiya, klaster metodi, matematik ta’lim, didaktik imkoniyat, funksiyalar ustida amallar, mustaqil fikrlash, Lebeg o’lchovi, Borel to’plami

Didactic potential of using the cluster method in teaching operations on measurable functions

Feruza Yadgarovna Mardanova
f.y.mardanova@buxdu.uz
Bukhara State University

Abstract: This paper highlights the didactic potential of the cluster method in teaching operations on measurable functions. It examines equivalent definitions of measurability, conditions for the preservation of measurability, and proof ideas for the sum, product, quotient, absolute value, maximum, and limit of a sequence. A table of common student errors, seven fully solved mathematical examples, an 80-minute lesson plan breakdown, evaluation criteria, and three-level independent study assignments are proposed. Through these elements, ways to develop students' independent thinking are substantiated.

Keywords: measurable function, cluster method, mathematics education, didactic potential, operations on functions, independent thinking, Lebesgue measure, Borel set

(cc) BY

Kirish

Oliy matematika ta'limining muhim vazifasi talabaning teoremani yodlashidan ko‘ra uning qo‘llanish shartlarini mustaqil tekshira olishidir. O‘lchovli funksiya tushunchasi Lebeg integrali, funksional analiz va ehtimollar nazariyasining nazariy asoslaridan biri. Lebeg integrali faqat o‘lchovli funksiyalar uchun ta'riflanadi; ehtimollar nazariyasida tasodifiy miqdor ham ehtimollik fazosida berilgan o‘lchovli funksiyadir [1,2,3]. Shuning uchun talaba ikki tasodifiy miqdor yig‘indisi yoki ko‘paytmasi yana tasodifiy miqdor ekanini asoslay olmasa, keyingi kurslarda tayanchsiz qoladi.

Mavzuni o‘rganishda bir nechta qiyinchilik muntazam takrorlanadi. Talabalar o‘lchovlilikni uzluksizlik bilan tenglashtiradi va Dirixle funksiyasi kabi hech bir nuqtada uzluksiz bo‘lmagan funksiyani «o‘lchovli emas» deb hisoblaydi. Bo‘linma qaralganda aniqlanish sohasi e'tibordan chetda qoladi, maxrajning nolga tengligi tekshirilmaydi. Yig‘indining o‘lchovliligini isbotlashda $\{f + g > a\} = \{f > a/2\} \cup \{g > a/2\}$ kabi noto‘g‘ri tenglik yoziladi. Bu xatolarning umumiy ildizi bor: talaba har bir amalni alohida qoida sifatida eslab qoladi va qoidalar orasidagi mantiqiy bog‘lanishni ko‘rmaydi.

Shu sababli bilimlarni alohida qoidalar tarzida emas, o‘zaro bog‘langan tizim sifatida bayon etish talab etiladi. Klaster metodi ta'rif, amallar, ularning bajarilish shartlari, misollar va isbotlarni markaziy tushuncha atrofidagi tarmoqlarda ko‘rsatib, tushunchalararo aloqalarni aniqlashtiradi. Metod tanqidiy fikrlashni rivojlantirish texnologiyalari doirasida keng tarqalgan va odatda gumanitar fanlarda qo‘llanadi; matematik tahlilda esa undan isbot tuzilishini ko‘rsatish uchun foydalanish mumkin. [4] maqolada o‘zgarishi chegaralangan funksiyalar mavzusini o‘qitishda qo‘llaniladigan interfaol metodlar yoritilgan. [5-8] maqolalarda torda aniqlangan o‘lchovli funksiya bilan bog‘liq tadqiqotlar olib borilgan, [9-13] maqolalarda esa o‘lchovli funksiyalarning xossalaridan foydalanib operatorli matritsalarning muhim va diskret spektrlari o‘rganilgan.

Ishning maqsadi mazkur mavzuni o‘rgatish uchun klaster modelini ishlab chiqish va uning didaktik imkoniyatlarini asoslashdir. Vazifalar: o‘lchovlilik saqlanish shartlarini isbot g‘oyalari bilan tushuntirish; talabalar xatolarini tizimlashtirish; bosqichli mashg‘ulotni loyihalash; natijani matematik topshiriqlar hamda mezonli baholash bilan tekshirish.

Asosiy qism

1. O‘lchovli funksiyalar va amallarning matematik asoslari

(X, Σ) o‘lchovli fazo, $f : X \to \mathbb{R}$ haqiqiy va chekli qiymatli funksiya bo‘lsin. Har bir $a \in \mathbb{R}$ uchun $\{x \in X : f(x) > a\} \in \Sigma$ bo‘lsa, f o‘lchovli deyiladi. Bunga teng kuchli shart: istalgan Borel to‘plamining f bo‘yicha teskari obrazi Σ ga kiradi. Ta'rifdagi «>»

(cc) BY

belgisini «≥», «<» yoki «≤» bilan almashtirish ham teng kuchli ta’rif beradi. Masalan, $\{f > a\}$ to‘plamlardan $\{f \geq a\}$ quyidagicha hosil qilinadi:

$$\{f \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f > a - 1/n\}.$$

Sanoqli kesishma Σ dan chiqmagani uchun $\{f \geq a\} \in \Sigma$. Qolgan ikki to‘plam to‘ldiruvchi olish bilan topiladi: $\{f < a\} = X \setminus \{f \geq a\}$, $\{f \leq a\} = X \setminus \{f > a\}$. Bu kichik isbot talabaga σ-algebraning qaysi xossalari ishlatilganini ko‘rsatadi va keyingi isbotlarda ham shu usul qayta qo‘llanadi.

Lebeg o‘lchovi qaraladigan sohada uzluksiz funksiyalar, monoton funksiyalar hamda o‘lchovli A to‘plamining χ_A indikator funksiyasi o‘lchovlidir. Monoton funksiya uchun $\{f > a\}$ to‘plam oraliq (yoki bo‘sh to‘plam, yoki butun soha) bo‘ladi, shuning uchun uning o‘lchovliligi bevosita ko‘rinadi. Biroq o‘lchovlilikdan uzluksizlik kelib chiqmaydi. Dirixle funksiyasi $\chi_{\mathbb{Q}}$ hech bir nuqtada uzluksiz emas, lekin $\mathbb{Q}$ sanoqli to‘plam bo‘lgani uchun o‘lchovli. Qarama-qarshi misol ham kerak: Vitali to‘plami V Lebeg ma’nosida o‘lchovli emas, shuning uchun χ_V o‘lchovli funksiya emas [3]. Bu misol talabaga «hamma funksiya o‘lchovli» degan noto‘g‘ri xulosadan saqlanishga yordam beradi.

f va g bir xil (X, Σ) fazodagi haqiqiy, chekli qiymatli o‘lchovli funksiyalar bo‘lsin. U holda $f + g$, $f - g$, fg, cf $(c \in \mathbb{R})$ va $|f|$ ham o‘lchovli. Umumiy sabab: $(f, g) : X \to \mathbb{R}^2$ o‘lchovli akslantirish, yig‘indi, ayirma, ko‘paytma va modul esa uzluksiz amallar. Talaba shu orqali «o‘lchovli akslantirish + uzluksiz amal → o‘lchovli natija» mantiqiy zanjirini anglaydi. Bu umumiy dalil ikki o‘lchovli Borel to‘plamlarni talab qiladi, shuning uchun darsda har bir amal uchun elementar isbot ham beriladi. Yig‘indi uchun ratsional sonlar zichligidan foydalaniladi:

$$\{f + g > a\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{f > r\} \cap \{g > a - r\}).$$

Haqiqatan, $f(x) + g(x) > a$ bo‘lsa, $f(x) > r > a - g(x)$ shartni qanoatlantiruvchi ratsional r topiladi; teskari yo‘nalish esa ravshan. O‘ng tomonda sanoqli birlashma turgani uchun natija Σ ga tegishli. Songa ko‘paytirishda $c > 0$ bo‘lsa $\{cf > a\} = \{f > a/c\}$, $c < 0$ bo‘lsa $\{cf > a\} = \{f < a/c\}$, $c = 0$ da cf o‘zgarmas funksiya. Modul uchun $a \geq 0$ da $\{|f| > a\} = \{f > a\} \cup \{f < -a\}$, $a < 0$ da esa $\{|f| > a\} = X$. Ko‘paytma kvadratlar orqali ifodalanadi:

$$fg = \tfrac{1}{4}[(f + g)^2 - (f - g)^2], \{h^2 > a\} = \{h > \sqrt{a}\} \cup \{h < -\sqrt{a}\} \ (a \geq 0).$$

Shu yo‘l bilan maksimum va minimum ham o‘lchovli ekani ko‘rsatiladi: $\max(f, g) = \tfrac{1}{2}(f + g + |f - g|)$, $\min(f, g) = \tfrac{1}{2}(f + g - |f - g|)$. Xususan, $f^+ = \max(f, 0)$ va $f^- = \max(-f, 0)$ o‘lchovli, $f = f^+ - f^-$ va $|f| = f^+ + f^-$. Aynan shu yoyilma keyinchalik Lebeg integralini ishorasi o‘zgaruvchi funksiyalar uchun ta’riflashda ishlatiladi.

Bo‘linmada $D = \{x \in X : g(x) \neq 0\}$ o‘lchovli to‘plam hisoblanadi; f/g aynan shu D sohada o‘lchovli. D da 1/g ning o‘lchovliligi bevosita tekshiriladi: masalan, $a > 0$ uchun $\{1/g > a\} = \{0 < g < 1/a\}$. Agar g hech qayerda nolga teng bo‘lmasa, bo‘linma butun X da o‘lchovli. Aks holda $g = 0$ bo‘lgan nuqtalarda bo‘linma aniqlanmagan; u

(cc) BY

yerda alohida qiymat tayinlash orqali o‘lchovli kengaytma tuzish mumkin. Chekli qiymatlilik sharti $\infty - \infty$ singari noaniq ifodalarni istisno etadi.

Kompozitsiya ham shu zanjirga kiradi. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uzluksiz (umuman, Borel) funksiya va f o‘lchovli bo‘lsa, $\varphi \circ f$ o‘lchovli, chunki $\{\varphi \circ f > a\} = f^{-1}(\varphi^{-1}((a, \infty)))$ va $\varphi^{-1}((a, \infty))$ ochiq to‘plam. Shunday qilib, e^f, sin f, f^2, $|f|^p$ $(p > 0)$ funksiyalar alohida isbotsiz o‘lchovli bo‘ladi. Teskari tartibdagi kompozitsiya $f \circ \varphi$ esa umumiy holda o‘lchovli bo‘lmasligi mumkin. Bu nozik farqni talabaga isbotsiz, faqat ogohlantirish sifatida aytish yetarli, lekin klasterda u «Saqlanish shartlari» tarmog‘ida alohida belgilanadi.

Amallar ro‘yxatini limit amallari to‘ldiradi. f_n o‘lchovli funksiyalar ketma-ketligi bo‘lsa, $\sup f_n$, $\inf f_n$, yuqori va quyi limitlar (kengaytirilgan qiymatlar bilan) o‘lchovli; ketma-ketlik har bir nuqtada yaqinlashsa, limit funksiya ham o‘lchovli. Masalan, $\{\sup f_n > a\} = \bigcup_n \{f_n > a\}$. Bu yerda uzluksiz funksiyalar bilan muhim farq bor: uzluksiz funksiyalarning nuqtaviy limiti uzluksiz bo‘lmasligi mumkin, o‘lchovli funksiyalar sinfi esa nuqtaviy limitga nisbatan yopiq. Lebeg o‘lchovi to‘liq bo‘lgani uchun yana bir xossa o‘rinli: f o‘lchovli va g = f deyarli hamma yerda bo‘lsa, g ham o‘lchovli [3; 5].

O‘lchovli funksiyalarning Lebeg integrali bilan bog‘lanishini sodda funksiyalar orqali ko‘rsatish mumkin. Chekli sondagi qiymat qabul qiluvchi o‘lchovli funksiya sodda funksiya deyiladi: $\varphi = c_1\chi_{A_1} + \ldots + c_k\chi_{A_k}$. Har qanday manfiy bo‘lmagan o‘lchovli f uchun $\varphi_n = \min(n, \lfloor 2^n f \rfloor / 2^n)$ sodda funksiyalar o‘suvchi ketma-ketlik tashkil etadi va har bir nuqtada f ga yaqinlashadi. Masalan, [0, 1] da $f(x) = x$ uchun φ_1 qiymatlari 0 va 1/2, φ_2 qiymatlari esa 0, 1/4, 1/2, 3/4 bo‘ladi. Talaba bu qurilmada yig‘indi, songa ko‘paytirish, minimum va limit amallari birgalikda ishlashini ko‘radi [14-21].

Mavzuni o‘qitishda uchraydigan asosiy xatolar 1-jadvalda keltirilgan. Har bir xatoga mos savol klasterning qaysi tarmog‘ida muhokama qilinishi ham ko‘rsatilgan.

1-jadval

O‘lchovli funksiyalar mavzusidagi tipik xatolar

Tipik xato	Tuzatuvchi savol yoki misol	Klaster tarmog‘i
«O‘lchovli funksiya uzluksiz bo‘ladi»	$\chi_{\mathbb{Q}}$ qaysi nuqtalarda uzluksiz? $\{\chi_{\mathbb{Q}} > a\}$ to‘plamlar qanday?	Ta’rif; matematik misollar
$\{f + g > a\} = \{f > a/2\} \cup \{g > a/2\}$	$f(x) = x$, $g(x) = -x$, $a = 1$ uchun ikki tomonni solishtiring	Saqlanish shartlari (isbot)
«g(1) = 0 bo‘lsa ham f/g butun $\mathbb{R}$ da aniqlangan»	f/g ning x = 1 dagi qiymati nimaga teng?	Bo‘linma, D soha
«Uzluksiz funksiyalar limiti uzluksiz, demak, faqat shular o‘lchovli»	$f_n(x) = x^n$ ning [0, 1] dagi limitini toping	Limit amallari
«Har qanday funksiya o‘lchovli»	Vitali to‘plamining indikatori haqida nima deyish mumkin?	Ta’rif; qarshi misollar

(cc) BY

2. Klaster modelining tuzilishi va didaktik vazifasi

Klaster metodi bilimlarni markaziy tushuncha atrofida tarmoqlab, ularning mantiqiy aloqalarini ko‘rsatadigan interfaol usul. Odatda markazga asosiy so‘z yoziladi, undan chiziqlar bilan bog‘langan tushunchalar chiqariladi, har bir tushunchadan esa yanada aniqroq tarmoqlar o‘sadi. Erkin klasterda talabalar bog‘lanishlarni o‘zlari taklif qiladi, tuzilmali klasterda o‘qituvchi asosiy tarmoqlarni oldindan belgilaydi va talabalar ularni to‘ldiradi. Matematika darsida ikkinchi variant samaraliroq, chunki tarmoqlar orasidagi har bir chiziq ta’rif yoki teorema bilan asoslanishi kerak.

«O‘lchovli funksiyalar» markazidan to‘rtta asosiy tarmoq chiqariladi. Mustahkamlash mashg‘ulotida ularga beshinchi tarmoq qo‘shiladi. Tarmoqlarning mazmuni 2-jadvalda berilgan.

2-jadval

«O‘lchovli funksiyalar» klasterining tarmoqlari

Tarmoq	Mazmuni	Yetakchi savol
1. Amallar	$f+g$; $f-g$; fg; cf; $\lvert f\rvert$; f/g; $\max(f,g)$, $\min(f,g)$	Qaysi amallar o‘lchovlilikni saqlaydi?
2. Saqlanish shartlari	Bir xil o‘lchovli fazo; haqiqiy va chekli qiymatlar; uzluksiz algebraik amallar; bo‘linma uchun $g \neq 0$ bo‘lgan D soha	Shart buzilsa nima bo‘ladi?
3. Matematik misollar	x va $\chi_{[0,\infty)}$; x^2 va $\chi_{\mathbb{Q}}$; $(x^2-1)/(x-1)$; $\sin x$ ning musbat va manfiy qismlari; x^n	Misol qaysi shartni tekshiradi?
4. Amaliy topshiriqlar	O‘lchovlilikni asoslash; aniqlanish sohasini topish; xatoni aniqlash; natijani umumlashtirish	Javobni qanday tekshirish mumkin?
5. Limit amallari (qo‘shimcha)	$\sup$, $\inf$, $\lim f_n$; deyarli hamma yerda tenglik	Uzluksiz funksiyalar sinfidan farqi nimada?

Tarmoqlar «amal → shart → teorema → misol» ketma-ketligida bog‘lanadi. Masalan, «bo‘linma» amalidan «$g \neq 0$» shartiga, undan «f/g o‘lchovli D da» teoremasiga va nihoyat $(x^2-1)/(x-1)$ misoliga chiziq tortiladi. Talabalar har bir chiziq yoniga uni asoslovchi dalilni qisqa yozadi, guruhdoshlarining bog‘lanishlarini dalil bilan tekshiradi. Dalili ko‘rsatilmagan chiziq klasterda qolmaydi. O‘qituvchi tayyor sxemani bermasdan, uni talabalar takliflari asosida to‘ldiradi.

Klaster tuzish bir necha qadamda boradi. Avval talabalar markaziy tushuncha bilan bog‘liq barcha so‘zlarni erkin aytadi va o‘qituvchi ularni doskaga yozadi: «σ-algebra», «Borel to‘plam», «uzluksiz», «indikator», «yig‘indi», «Lebeg integrali». So‘ng so‘zlar tarmoqlarga ajratiladi va har bir tarmoq ichida tartibga solinadi. Uchinchi qadamda tarmoqlar orasidagi chiziqlar tortiladi; masalan, «Borel to‘plam» bilan «indikator funksiya» orasidagi chiziq yoniga «A Borel to‘plam $\Rightarrow$ χ_A o‘lchovli» deb yoziladi. To‘rtinchi qadamda bir-biriga zid bog‘lanishlar aniqlanadi va muhokama

(cc) BY

qilinadi. Oxirida klaster qisqa matnga aylantiriladi: talaba sxemadan foydalanib, mavzuni og‘zaki yoki yozma bayon qiladi.

Klaster bu mavzuda bir nechta didaktik vazifani bajaradi. U mavzuning tuzilishini bir sahifada ko‘rsatadi: talaba qaysi teorema qaysi ta’rifga tayanishini ko‘radi. Xatolar ham tarmoq ichida joy oladi: «o‘lchovli = uzluksiz» degan fikr «Ta’rif» va «Misollar» tarmoqlari orasidagi ziddiyat sifatida aniqlanadi. Guruhlar turli tarmoqlar ustida ishlagani uchun yakuniy klaster jamoaviy mahsulotga aylanadi, biroq har bir guruh o‘z qismini boshqalar oldida himoya qiladi. Tushunchalar xaritasi yoki Venn diagrammasidan farqli ravishda klaster bitta markazdan o‘sadi va shu bilan mavzuning asosiy tushunchasini doim ko‘z oldida saqlaydi.

3. Matematik misollar va ulardan foydalanish

Misollar klasterning uchinchi tarmog‘ini to‘ldiradi. Ular soddadan murakkabga qarab joylashtirilgan: birinchi uchta misol asosiy mashg‘ulotda, qolganlari mustahkamlash darsida va mustaqil ishda qo‘llanadi.

1-misol (yig‘indi va ko‘paytma). $X = \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = \chi_{[0,\infty)}(x)$. f uzluksiz, $[0, \infty)$ Borel to‘plam, demak, f va g o‘lchovli. Yig‘indi hamda ko‘paytma quyidagicha:

$$(f + g)(x) = x \ (x < 0 \text{ da}),\ x + 1 \ (x \geq 0 \text{ da});$$
$$(fg)(x) = 0 \ (x < 0 \text{ da}),\ x \ (x \geq 0 \text{ da}).$$

$\{f + g > a\} = [(-\infty, 0) \cap (a, \infty)] \cup [[0, \infty) \cap (a - 1, \infty)]$ Borel to‘plam; $\{fg > a\}$ ham ikki Borel to‘plam birlashmasi. Aniq qiymatlar uchun tekshirish foydali: $a = 0{,}5$ bo‘lsa $\{f + g > 0{,}5\} = [0, \infty)$, chunki $x < 0$ da $x > 0{,}5$ bajarilmaydi, $x \geq 0$ da esa $x + 1 > 0{,}5$ doim o‘rinli. Kutiladigan javob: yig‘indi va ko‘paytma o‘lchovli; g ning $x = 0$ dagi uzilishi bunga to‘sqinlik qilmaydi.

2-misol (ayirma, songa ko‘paytirish va modul). $X = [0, 1]$, $Q = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, $f(x) = \chi_Q(x)$, $g(x) = x^2$. Q sanoqli Borel to‘plam, g esa uzluksiz: ikkisi ham o‘lchovli. $h(x) = |2f(x) - g(x)|$ uchun:

$$h(x) = |2 - x^2|, \text{ agar } x \in Q;\ h(x) = x^2, \text{ agar } x \in [0, 1] \setminus Q.$$

$\{h > t\} = [Q \cap \{|2 - x^2| > t\}] \cup [([0, 1] \setminus Q) \cap \{x^2 > t\}]$. Qismlar Borel to‘plam, demak, h o‘lchovli. $[0, 1]$ da $x^2 \leq 1$ bo‘lgani uchun $|2 - x^2| = 2 - x^2$ ekanini ham talabalar o‘zi payqashi kerak. Kutiladigan javob: uzluksizlik zarur emas; ayirma, songa ko‘paytirish va modul o‘lchovlilikni saqlaydi.

3-misol (bo‘linmaning aniqlanish sohasi). $X = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x - 1$. Ikkisi uzluksiz va o‘lchovli, ammo $g(1) = 0$. Demak, $q(x) = f(x)/g(x)$ faqat $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ da aniqlangan va $q(x) = x + 1$; u D da o‘lchovli. $q(1) = 2$ deb belgilansa uzluksiz, $q(1) = 0$ deb belgilansa uzluksiz bo‘lmagan o‘lchovli kengaytma hosil bo‘ladi. Ikkala kengaytma faqat bitta nuqtada farq qiladi, ya’ni deyarli hamma yerda teng. Kutiladigan javob: aniqlanish sohasi va kengaytma farqlanishi shart.

4-misol (musbat va manfiy qism). $X = [0, 2\pi]$, $f(x) = \sin x$. Talabalar $f^+ = \max(f, 0)$ va $f^- = \max(-f, 0)$ ni topadi: $[0, \pi]$ da $f^+(x) = \sin x$, $f^-(x) = 0$; $(\pi, 2\pi]$ da $f^+(x) = 0$,

(cc) BY

$f^-(x) = -\sin x$. Ikkalasi ham uzluksiz va manfiy emas, shuning uchun o‘lchovli. So‘ng $f = f^+ - f^-$ va $|f| = f^+ + f^-$ tengliklari tekshiriladi. O‘qituvchi «Bu yoyilma nega kerak?» deb so‘raydi va Lebeg integralining $\int f = \int f^+ - \int f^-$ ta’rifiga ishora qiladi. Kutiladigan javob: $\max(f, 0) = \frac{1}{2}(f + |f|)$ formulasi orqali o‘lchovlilik umumiy holda ham isbotlanadi.

5-misol (ketma-ketlik limiti). $X = [0, 1]$, $f_n(x) = x^n$. Har bir f_n uzluksiz. Nuqtaviy limit:

$$f(x) = \lim x^n = 0 \ (0 \le x < 1 \text{ da}),\ f(1) = 1, \text{ ya’ni } f = \chi_A,\ A = \{1\}.$$

Limit funksiya $x = 1$ da uzilishga ega, demak, uzluksiz funksiyalar sinfidan chiqib ketdi. Uning o‘lchovliligini ta’rif bo‘yicha tekshiramiz: $a < 0$ da $\{f > a\} = [0, 1]$; $0 \le a < 1$ da $\{f > a\} = \{1\}$; $a \ge 1$ da $\{f > a\} = \emptyset$. Uchala to‘plam ham Borel to‘plam. Kutiladigan javob: o‘lchovli funksiyalar sinfi nuqtaviy limitga nisbatan yopiq, uzluksiz funksiyalar sinfi esa yopiq emas. Bu misol klasterning beshinchi tarmog‘ini ochadi.

6-misol (isbotdagi xatoni topish). Talabalarga quyidagi «isbot» beriladi: «f va g o‘lchovli, demak, $\{f + g > a\} = \{f > a/2\} \cup \{g > a/2\}$ o‘lchovli to‘plamlar birlashmasi». Topshiriq: isbotdagi xatoni toping va qarshi misol keltiring. Guruhlar odatda $f(x) = x$, $g(x) = -x$, $a = 1$ misoliga chiqadi: $f + g = 0$, shuning uchun $\{f + g > 1\} = \emptyset$, lekin $\{x > 1/2\} \cup \{-x > 1/2\} = (-\infty, -1/2) \cup (1/2, \infty)$ bo‘sh emas. To‘g‘risi faqat $\{f > a/2\} \cap \{g > a/2\} \subset \{f + g > a\}$ munosabati. Muhokamadan so‘ng to‘g‘ri isbot ratsional sonlar orqali (1-bo‘limdagi formula) tiklanadi. Kutiladigan javob: tenglik noto‘g‘ri, xulosa esa to‘g‘ri; uni boshqa yo‘l bilan isbotlash kerak.

7-misol (deyarli hamma yerda tenglik). $X = [0, 1]$, $g(x) = x^2$, agar $x \notin \mathbb{Q}$, va $g(x) = 5$, agar $x \in \mathbb{Q}$. Savol: g o‘lchovlimi? Talabalar ikki xil yo‘l topadi. Birinchi yo‘l: $g = x^2(1 - \chi_{\mathbb{Q}}) + 5\chi_{\mathbb{Q}}$, ya’ni o‘lchovli funksiyalarning ko‘paytmasi va yig‘indisi. Ikkinchi yo‘l: g va x^2 faqat sanoqli Q to‘plamda farq qiladi, Q ning Lebeg o‘lchovi nolga teng, demak, $g = x^2$ deyarli hamma yerda va Lebeg o‘lchovining to‘liqligiga ko‘ra g o‘lchovli. Ikkala yo‘lni solishtirish talabaga 1- va 5-tarmoqlar orasidagi bog‘lanishni ko‘rsatadi. Kutiladigan javob: g o‘lchovli; uning Lebeg integrali x^2 niki bilan bir xil, ya’ni 1/3.

Misollar va ular tekshiradigan shartlar 3-jadvalda umumlashtirilgan.

3-jadval

Misollar tizimi

Misol	Amal	Tekshiriladigan g‘oya
1. x va $\chi_{[0,\infty)}$	$f + g$, fg	Uzilish o‘lchovlilikka to‘sqinlik qilmaydi
2. $\chi_{\mathbb{Q}}$ va x^2	$f - g$, cf, $\lvert f\rvert$	Hech qayerda uzluksiz bo‘lmagan o‘lchovli funksiya
3. $(x^2 - 1)/(x - 1)$	f/g	Aniqlanish sohasi va kengaytma
4. $\sin x$	$\max(f, 0)$, $\max(-f, 0)$	f^+, f^- yoyilmasi; Lebeg integraliga ko‘prik
5. x^n	$\lim f_n$	Limitga nisbatan yopiqlik
6. Noto‘g‘ri isbot	$f + g$	To‘plamlar tengligini tekshirish, qarshi misol

(cc) BY

7. x^2 va 5 ($\mathbb{Q}$ da)	f + g, fg	Deyarli hamma yerda tenglik, Lebeg o‘lchovining to‘liqligi

4. Darsda qo‘llash bosqichlari va natijani baholash

Asosiy mashg‘ulot 80 daqiqaga mo‘ljallangan. Uning bosqichlari 4-jadvalda keltirilgan.

4-jadval

Mashg‘ulot bosqichlari (80 daqiqa)

Bosqich, vaqt	O‘qituvchi faoliyati	Talaba faoliyati
1. Bilimlarni faollashtirish (10 daqiqa)	«O‘lchovlilik qanday aniqlanadi?», «Uzluksizlik zarurmi?» savollarini beradi	Sath to‘plamlari o‘lchovli ekanini, uzluksizlik faqat yetarli shart ekanini aytadi
2. Tarmoqlash (15 daqiqa)	Markaz va to‘rt tarmoqni doskaga chizadi, guruhlarga tarmoq taqsimlaydi	To‘rt guruh amallar, shartlar, misollar va topshiriqlar tarmoqlarini matematik asoslar bilan to‘ldiradi
3. Misollarni tekshirish (25 daqiqa)	«g bir nuqtada nol bo‘lsa, f/g butun X da aniqlanadimi?» savoli bilan xatoni aniqlaydi	Uch guruh 1-3-misollarni yechadi, to‘rtinchi guruh bo‘linmaning D sohasini tushuntiradi
4. Guruhli muhokama (20 daqiqa)	Dalilsiz chiziqlarni klasterdan olib tashlashni talab qiladi	Guruhlar isbotlarni almashib, aniqlanish sohasi va dalillarning to‘g‘riligini tekshiradi
5. Umumlashtirish (10 daqiqa)	Yakuniy klasterni to‘ldiradi, tezkor topshiriq beradi	Individual topshiriqni bajaradi

Beshinchi bosqichdagi individual tezkor topshiriq: $f(x) = x^2$, $g(x) = \chi_{(0,\infty)}(x)$ uchun $(f + g)/g$ qayerda aniqlangan? To‘g‘ri javob: $D = (0, \infty)$, bu sohada natija $x^2 + 1$ va o‘lchovli. Ko‘p uchraydigan noto‘g‘ri javob «butun $\mathbb{R}$ da, chunki surat hech qachon nol emas» ko‘rinishida bo‘ladi. Bu javob bo‘linmaning aniqlanishi suratga emas, maxrajga bog‘liqligini yana bir bor muhokama qilishga sabab beradi.

Mustahkamlash mashg‘uloti 4-7-misollarga ajratiladi. Unda klasterga beshinchi tarmoq qo‘shiladi va 6-misol «Xatoni top» o‘yini shaklida guruhlar o‘rtasida o‘tkaziladi: har bir guruh boshqasi uchun bitta noto‘g‘ri «isbot» tuzadi, qarshi guruh xatoni topib, qarshi misol keltiradi [16-20].

Baholash mezonlari 5-jadvalda berilgan. Individual javob va guruh muhokamasi «o‘lchovli = uzluksiz» hamda «g = 0 bo‘lsa ham f/g aniqlangan» singari xatolarni aniqlashga yordam beradi.

5-jadval

Baholash mezonlari (jami 10 ball)

Mezon	Ball	Ko‘rsatkich
Ta’rif	2	O‘lchovlilik ta’rifini va teng kuchli shartlarni to‘g‘ri ifodalaydi
Amallar va shartlar	3	Har bir amal uchun o‘lchovlilik saqlanish shartini va isbot g‘oyasini ko‘rsatadi

(cc) BY

Misol yechimi va aniqlanish sohasi	3	Sath to‘plamlarini to‘g‘ri topadi, D sohani aniqlaydi
Klasterdagi mantiqiy bog‘lanish	1	Tarmoqlar orasidagi har bir chiziqni dalil bilan asoslaydi
Guruhdosh xulosasini dalillash	1	Boshqa guruh xulosasini tekshiradi, xato bo‘lsa qarshi misol keltiradi

Mustaqil ish topshiriqlari uch darajada tuziladi, bu talabalar tayyorgarligidagi farqni hisobga olish imkonini beradi.

A daraja. 1) $X = \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = \chi_{[1,2]}(x)$ bo‘lsin. fg ning o‘lchovliligini asoslang va $\{fg > 0\}$ to‘plamni toping. Javob: $fg = 3x - 2$ [1, 2] da va 0 qolgan nuqtalarda; [1, 2] da $3x - 2 \geq 1 > 0$, shuning uchun $\{fg > 0\} = [1, 2]$. 2) $f(x) = x^3 - x$ uchun $\{f > 0\}$ ni toping. Javob: $x(x - 1)(x + 1) > 0$, ya’ni $\{f > 0\} = (-1, 0) \cup (1, \infty)$.

B daraja. 1) $X = \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = \sin x$. f/g qayerda aniqlangan va nega u shu sohada o‘lchovli? Javob: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$; sanoqli to‘plamning to‘ldiruvchisi Borel to‘plam, D da f/g o‘lchovli. 2) $X = [0, 1]$, $f(x) = x$, $g(x) = 1 - x$ uchun $\max(f, g)$ ni toping. Javob: [0, 1/2] da $1 - x$, [1/2, 1] da x; formula bo‘yicha $\max(f, g) = \frac{1}{2}(1 + |2x - 1|)$.

C daraja. 1) Ta’rifdan foydalanib, f o‘lchovli bo‘lsa $\{f \geq a\}$ va $\{f = a\}$ to‘plamlar o‘lchovli ekanini isbotlang. Yechim g‘oyasi: $\{f \geq a\} = \bigcap \{f > a - 1/n\}$, $\{f = a\} = \{f \geq a\} \setminus \{f > a\}$. 2) $X = [0, 1]$, $f_n(x) = n \cdot \chi_{(0,\ 1/n)}(x)$. Nuqtaviy limitni toping va uning o‘lchovliligini tekshiring. Yechim: $x = 0$ da barcha $f_n(0) = 0$; $x > 0$ da $n > 1/x$ bo‘lgach $f_n(x) = 0$. Limit nolga teng va o‘lchovli. Qo‘shimcha savol: har bir f_n ning Lebeg integrali $n \cdot (1/n) = 1$ ga teng, limitning integrali esa 0. Bu natija keyingi mavzu, Lebeg teoremalari uchun muammoli vaziyat bo‘ladi.

Metodik jihatdan quyidagilarga amal qilish tavsiya etiladi. Klaster doskada yoki umumiy elektron doskada dars oxirigacha saqlanadi va har bir yangi natija tegishli tarmoqqa qo‘shib boriladi. Isbotlar to‘liq yozdirilmaydi, lekin har bir chiziq uchun bir qatorli dalil talab qilinadi. Qarshi misollar (Vitali to‘plami, noto‘g‘ri tengliklar) alohida rang bilan belgilanadi, shunda talaba qaysi tasdiq rost, qaysisi yolg‘on ekanini sxemadan ko‘radi.

Refleksiya bosqichida talabalar uchta savolga yozma javob beradi: «Klasterning qaysi chizig‘ini asoslash eng qiyin bo‘ldi?», «Dars boshida qaysi fikringiz noto‘g‘ri edi va uni nima o‘zgartirdi?», «O‘lchovli funksiyalar sinfi qaysi amallarga nisbatan yopiq ekanini bir jumlada ayting». Javoblar keyingi mashg‘ulotni rejalashtirishda ishlatiladi. Talabalar tuzgan klasterlarning o‘zi ham tahlil materiali bo‘ladi: tarmoqlar to‘liqligi, dalil bilan asoslangan chiziqlar ulushi va qarshi misollar bor-yo‘qligi o‘qituvchiga mavzuning qaysi qismi yaxshi o‘zlashtirilmaganini ko‘rsatadi.

Metodning cheklovlarini ham aytib o‘tish kerak. Klaster isbotni almashtirmaydi: u isbotning tuzilishini ko‘rsatadi, lekin har bir qadamni yozish talabaning o‘zidan talab qilinadi. Guruh ishida kuchli talabalar asosiy yukni olishi mumkin, shuning uchun

(cc) BY

beshinchi bosqichdagi individual topshiriq majburiy. Natijani baholashda oldingi va keyingi qisqa topshiriqlarni solishtirish mumkin, biroq ushbu ishda empirik samaradorlik haqidagi statistik da'volar keltirilmaydi.

Xulosa

Klaster metodi o'lchovli funksiyalar ustida amallarni ta'rif, shart va isbotlar bilan bog'lab o'rgatishga yordam beradi. Taklif etilgan model markaziy tushunchadan to'rtta asosiy va bitta qo'shimcha tarmoq chiqaradi: amallar, saqlanish shartlari, matematik misollar, amaliy topshiriqlar hamda limit amallari. Tarmoqlar orasidagi har bir bog'lanishni dalil bilan asoslash talabi talabani teoremani yodlashdan uning qo'llanish shartlarini tekshirishga olib o'tadi.

Yettita misol o'lchovlilik va uzluksizlik orasidagi farqni, bo'linmaning aniqlanish sohasini, f^+ va f^- yoyilmasini, o'lchovli funksiyalar sinfining nuqtaviy limitga nisbatan yopiqligini va noto'g'ri isbotni qarshi misol bilan rad etishni, deyarli hamma yerda tenglikning rolini ko'rsatadi. Tipik xatolar jadvali va «Xatoni top» topshirig'i xatolarni yashirish o'rniga muhokama manbaiga aylantiradi. Guruhli muhokama va mustaqil misollar matematik fikrlash hamda xatolarni tahlil qilish ko'nikmalarini rivojlantiradi. Natijalarni mezonli baholash va uch darajali mustaqil ish metoddan maqsadli foydalanishni ta'minlaydi. Modelni «Funksional analiz» va «Haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi» fanlarida qo'llash hamda samaradorligini tajriba-sinov orqali tekshirish keyingi vazifa hisoblanadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1976.

2. Folland G. B. Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications. - 2nd ed. - New York: Wiley, 1999.

3. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. - М.: Наука, 1974.

4. T.H.Rasulov, X.R.Rasulov. Methodical recommendations for teaching the department of functions with limited variability. Scientific progress 2:1 (2021), pp. 559-567.

5. S.N.Lakaev, T.Kh.Rasulov. A model in the theory of perturbations of the essential spectrum of multi-particle operators. Mathematical Notes, 73:4 (2003), pp. 521-528.

6. T.Kh.Rasulov. Asymptotics of the discrete spectrum of a model operator associated with the system of three particles on a lattice. Theoretical and Mathematical Physics, 163:1 (2010), pp. 429-437.

7. Т.Х.Расулов. Исследование спектра одного модельного оператора в пространстве Фока. Теоретическая и математическая физика, 5:3 (2009), С. 327-342.

8. T.H.Rasulov. Investigations of the Essential Spectrum of a Hamiltonian in Fock Space. Applied Mathematics and Information Sciences, 4:3 (2010), pp. 395-412.

9. Т.Х.Расулов. О ветвях существенного спектра решетчатой модели спин-бозона с не более чем двумя фотонами. Теоретическая и математическая физика, 186:2 (2016), С. 293-310.

10. Т.Х.Расулов, Э.Б.Дилмуродов. Бесконечность числа собственных значений операторных (2x2)-матриц. Асимптотика дискретного спектра. Теоретическая и математическая физика 205:3 (2020), 368-390.

11. T.H.Rasulov, E.B.Dilmurodov. Essential spectrum of a 2x2 operator matrix and the Faddeev equation. European science 51:2 (2020), pp.7-10.

12. S.N.Lakaev, T.Kh.Rasulov. Efimov's effect in a model of perturbation theory of the essential spectrum. Functional Analysis and its Applications 37:1 (2003), pp. 69-71.

13. Т.Х.Расулов. О числе собственных значений одного матричного оператора. Сибирский математический журнал. 52:2 (2011), С. 400-415.

14. Марданова Ф.Я. Использование научного наследия великих предков на уроках математики. Проблемы педагогики. 6-51 (2020), С. 40-42.

15. Марданова Ф.Я. Рекомендации по организации самостоятельной работы в высших учебных заведениях. Вестник науки и образования. 95:17-2 (2020), С. 83-86.

16. Марданова Ф.Я. Нестандартные методы обучения высшей математике. Проблемы педагогики. 53:2 (2021), С. 19-22.

17. U Umarova, M Boboyeva, F Mardanova. Integration of digital technologies into the educational process. AIP Conference Proceedings, 2025. 3268 (1), 060035.

18. Mardanova F.Ya. Matematika fani olimpiadalarida tayyorlash bo'yicha uslubiy ko'rsatmalar. Science and Education. 2:9 (2021), 297-308 betlar.

19. Boboyeva, M.N. Incorporate knowledge of different professions through problem-solving in school math classes. Science and Education 2.8 (2021): 496504.

20. Boboyeva, M.N. Prospects for improving the teaching of "mathematics" in schools. Science and Education 2.8 (2021): 486-495.

21. Бобоева М.Н. Метод графического органайзера при изучении темы «Множества неотрицательных целых чисел». Проблемы науки. 63:4 (2021), С. 72-75.