Matematika darslarida o‘quvchilarning mantiqiy fikrlashini rivojlantirish usullari

Nargiza Ahmedovna Tosheva
Buxoro davlat universiteti

Annotatsiya: Ushbu maqolada umumiy o‘rta ta’lim maktablarida matematika darslari jarayonida o‘quvchilarning mantiqiy fikrlash ko‘nikmalarini bosqichma-bosqich shakllantirish masalasi ko‘rib chiqilgan. Mantiqiy fikrlashning matematik asoslari - mulohazalar algebrasi, kvantorlar, zaruriy va yetarli shartlar, to‘g‘ri va teskari teoremalar - maktab matematikasi materiali misolida tahlil qilingan. Analiz va sintez, induksiya va deduksiya, qarama-qarshisini faraz qilish, matematik induksiya usuli, kontrmisol tuzish hamda masalani modellashtirishga asoslangan metodik usullar aniq misollar va formulalar yordamida bayon etilgan.

Kalit so‘zlar: mantiqiy fikrlash, mulohaza, implikatsiya, ekvivalensiya, kvantor, analiz, sintez, induksiya, deduksiya, isbot, kontrmisol, matematik induksiya, metodika.

Methods of developing students’ logical thinking in mathematics lessons

Nargiza Ahmedovna Tosheva
Bukhara State University

Abstract: The article examines the problem of the step-by-step formation of students' logical thinking in mathematics lessons in general secondary schools. Using material from the school curriculum, it analyzes the logical foundations of mathematics: propositional algebra, quantifiers, necessary and sufficient conditions, and direct and converse theorems. It describes teaching techniques based on analysis and synthesis, induction and deduction, proof by contradiction, mathematical induction, and the construction of counterexamples.

Keywords: logical thinking, proposition, implication, quantifier, analysis, synthesis, induction, deduction, proof, counterexample, teaching methodology

Kirish. Zamonaviy jamiyatda shaxsdan tayyor bilimni eslab qolishdan ko‘ra, yangi vaziyatni tahlil qilish, dalillarni solishtirish va asoslangan xulosa chiqarish qobiliyati ko‘proq talab qilinmoqda. Bu qobiliyatlarning negizida mantiqiy fikrlash yotadi. Maktab fanlari orasida mantiqiy fikrlashni eng izchil shakllantiradigan fan

(cc) BY

matematikadir, chunki uning har bir tushunchasi ta'rif orqali kiritiladi, har bir tasdig'i esa isbot orqali asoslanadi.

O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son "Matematika sohasidagi ta'lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi qarori matematika ta'limini mamlakatning ustuvor yo'nalishlaridan biri sifatida belgilab berdi. Shuningdek, 2020-yil 23-sentabrda qabul qilingan "Ta'lim to'g'risida"gi Qonun ta'lim jarayonida o'quvchilarning mustaqil va tanqidiy fikrlashini rivojlantirishni muhim vazifa sifatida ko'rsatadi. Xalqaro baholash dasturlari (PISA, TIMSS) ham o'quvchining formulani yodlab olganini emas, balki uni notanish vaziyatda qo'llay olishini va o'z javobini asoslay olishini tekshiradi [1].

Amaliyotda esa ko'plab o'quvchilar masalani namunaga qarab yechadi, lekin "nima uchun aynan shunday?" degan savolga javob bera olmaydi. Ular teoremaning shartini xulosasidan ajratishda, teskari teoremani to'g'ri deb hisoblashda, bitta misolni umumiy qoidaning isboti deb qabul qilishda xatoga yo'l qo'yadilar. Bu holatlar mantiqiy fikrlashni maxsus, maqsadli ravishda rivojlantirish zarurligini ko'rsatadi [2-4].

Matematika ta'limida o'quvchilarning mantiqiy fikrlash qobiliyatini rivojlantirishda zamonaviy pedagogik va raqamli texnologiyalardan samarali foydalanish muhim ahamiyat kasb etadi. Xususan, raqamli ta'lim texnologiyalarini o'quv jarayoniga tatbiq etish [5], masofaviy ta'limni tashkil etishda zamonaviy axborot-kommunikatsiya texnologiyalaridan foydalanish [6] ta'lim samaradorligini oshirishning muhim omillari hisoblanadi. Shuningdek, chiziqli integral tenglamalarni o'rganishda innovatsion texnologiyalardan foydalanish [7] matematik tushunchalarni chuqur anglash, tahlil qilish va mantiqiy xulosalar chiqarish ko'nikmalarini shakllantirishga xizmat qiladi. Mazkur yondashuvlar matematika darslarida o'quvchilarning mustaqil va mantiqiy fikrlash faoliyatini rivojlantirish uchun muhim metodik asos bo'lib xizmat qiladi.

Matematik tafakkurni rivojlantirishda murakkab matematik masalalarni tahlil qilish, ularning yechimlarini mantiqiy izchillik asosida asoslash va umumlashtirish muhim o'rin tutadi. Xususan, panjaraviy spin-bozon modellari, uch zarrachali sistemalar hamda operatorli matritsalarning spektral xossalariga oid tadqiqotlarda [8-10] matematik tahlilning nazariy usullari va mantiqiy isbotlash yondashuvlari keng qo'llanilgan. Shuningdek, operatorli matritsalarning muhim spektri, Faddeev tenglamalari va Efimov effekti bilan bog'liq ilmiy izlanishlarda [11, 12] murakkab matematik muammolarni bosqichma-bosqich tahlil qilish usullari rivojlantirilgan. Matritsali operatorlarning xos qiymatlarini aniqlashga qaratilgan tadqiqotlar [13] esa matematik masalalarni yechishda analitik fikrlash, mantiqiy xulosa chiqarish va nazariy bilimlarni amaliy qo'llashning ahamiyatini ko'rsatadi. Mazkur ilmiy

(cc) BY

yondashuvlardan matematika darslarida o‘quvchilarning mantiqiy fikrlash ko‘nikmalarini shakllantirishda metodik asos sifatida foydalanish mumkin.

Matematika fanini o‘qitishda o‘quvchilarning mantiqiy fikrlashini rivojlantirish uchun nazariy bilimlarni hisoblash, modellashtirish va zamonaviy axborot texnologiyalari bilan uyg‘unlashtirish muhim ahamiyatga ega. Xususan, umumlashgan Fridrixs modelining muhim spektrini MAPLE dasturida hisoblash [14] matematik masalalarni yechishda kompyuter texnologiyalaridan foydalanish imkoniyatlarini namoyon etadi. Panjaraviy spin-bozon modellari va Fridrixs modellari spektral xossalarini o‘rganishga bag‘ishlangan tadqiqotlar [15, 16] murakkab matematik jarayonlarni tahlil qilish hamda matematik modellashtirish ko‘nikmalarini shakllantirishga xizmat qiladi. Shuningdek, operatorli matritsalarning spektral chegaralarini baholash [17], molekulyar-rezonans modellarining muhim va diskret spektrlari hamda rezolventasini tadqiq etish [18, 19], ularning sonli tasvirini o‘rganish [20] matematik tahlil, hisoblash va mantiqiy xulosa chiqarish usullarining ahamiyatini ko‘rsatadi. Bunday ilmiy yondashuvlardan matematika darslarida o‘quvchilarning mustaqil fikrlash, muammoli vaziyatlarni tahlil qilish va matematik xulosalar chiqarish kompetensiyalarini rivojlantirishda foydalanish mumkin.

1. Mantiqiy fikrlash tushunchasi va uning matematik asoslari

Psixologiyada fikrlash voqelikning umumlashgan va bilvosita aks ettirilishi sifatida ta’riflanadi. Mantiqiy fikrlash esa fikrlashning shunday turiki, unda xulosa oldindan qabul qilingan asoslardan qat’iy qoidalar asosida keltirib chiqariladi. J.Piaje tadqiqotlariga ko‘ra, taxminan 11-12 yoshdan boshlab bolada formal operatsiyalar bosqichi boshlanadi: u gipoteza qura oladi va undan natija chiqara oladi. L.S.Vigotskiyning “eng yaqin rivojlanish zonasi” g‘oyasi esa o‘qituvchining to‘g‘ri tanlangan savoli o‘quvchini mustaqil erisha olmaydigan darajaga olib chiqishini asoslaydi.

Matematika darsida mantiqiy fikrlash rivojlanganligini quyidagi ko‘nikmalar orqali kuzatish mumkin:

• tushunchaning muhim va muhim bo‘lmagan belgilarini ajrata olish;

• teoremaning shartini va xulosasini aniq ko‘rsata olish;

• to‘g‘ri, teskari va qarama-qarshi tasdiqlarni farqlay olish;

• har bir qadamni ta’rif, aksioma yoki oldin isbotlangan teoremaga tayanib asoslay olish;

• umumiy tasdiqni rad etish uchun kontrmisol topa olish.

1.1. Mulohaza va mantiqiy amallar

Rost yoki yolg‘onligi haqida bir qiymatli fikr aytish mumkin bo‘lgan darak gap mulohaza deyiladi. Masalan, “17 - tub son” - rost mulohaza, “$2 + 3 > 7$” - yolg‘on mulohaza. “$x + 2 = 5$” esa mulohaza emas, balki predikat (o‘zgaruvchili mulohaza)dir: uning rostligi x ning qiymatiga bog‘liq [2,3].

(cc) BY

Mulohazalar ustida beshta asosiy amal bajariladi: inkor ($\neg A$), kon'yunksiya ($A \wedge B$, "va"), diz'yunksiya ($A \vee B$, "yoki"), implikatsiya ($A \Rightarrow B$, "agar …, u holda …") va ekvivalensiya ($A \Leftrightarrow B$, "faqat va faqat shu holdaki"). Ularning rostlik qiymatlari 1-jadvalda keltirilgan (1 - rost, 0 - yolg'on).

1-jadval.

Mantiqiy amallarning rostlik jadvali

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

O'quvchilar uchun eng qiyini implikatsiyaning uchinchi va to'rtinchi satrlaridir: yolg'on shartdan har qanday xulosa "rost" hisoblanadi. Buni hayotiy misol bilan tushuntirish qulay: "Agar yomg'ir yog'sa, men soyabon olaman" degan va'da faqat yomg'ir yog'ib, soyabon olinmagan holdagina buziladi.

Matematik isbotlarda eng ko'p ishlatiladigan teng kuchli formulalar quyidagilardir:

$$(A \Rightarrow B) \equiv (\neg B \Rightarrow \neg A) \qquad (1)$$

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B, \qquad \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B \qquad (2)$$

$$(A \Leftrightarrow B) \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \qquad (3)$$

(1) formula (kontrapozitsiya qonuni) teskarisini faraz qilish usuli bilan isbotlashning mantiqiy asosidir. (2) formulalar - de Morgan qonunlari - murakkab shartlarni inkor qilishda kerak bo'ladi. (3) formula esa "zarur va yetarli" shaklidagi teoremani ikki qismga ajratib isbotlash kerakligini ko'rsatadi.

1.2. Kvantorlar

"Barcha", "ixtiyoriy" so'zlari umumiylik kvantori $\forall$ bilan, "mavjud", "hech bo'lmaganda bitta" so'zlari esa mavjudlik kvantori $\exists$ bilan belgilanadi. Masalan:

$$\forall x \in \mathbb{R}:\ x^2 \geq 0 \ \text{(rost)}, \qquad \exists x \in \mathbb{N}:\ x^2 = 2 \ \text{(yolg'on)}$$

Kvantorli mulohazani inkor qilish qoidasi o'quvchilarga ko'p qiyinchilik tug'diradi:

$$\neg\big(\forall x\ P(x)\big) \equiv \exists x\ \neg P(x), \qquad \neg\big(\exists x\ P(x)\big) \equiv \forall x\ \neg P(x) \qquad (4)$$

Bu qoidadan muhim metodik xulosa kelib chiqadi: umumiy tasdiqni rad etish uchun bitta kontrmisol yetarli, lekin uni isbotlash uchun hatto ming marta tekshirilgan misol ham yetarli emas.

1.3. Zaruriy va yetarli shartlar

Agar $A \Rightarrow B$ rost bo'lsa, A shart B uchun yetarli, B esa A uchun zaruriy shart deyiladi. Masalan, "son 6 ga bo'linadi" $\Rightarrow$ "son 3 ga bo'linadi". Demak, 6 ga bo'linish 3 ga bo'linish uchun yetarli, 3 ga bo'linish esa 6 ga bo'linish uchun zaruriy,

(cc) BY

ammo yetarli emas (masalan, 9 soni). Agar $A \Leftrightarrow B$ bo‘lsa, A shart B uchun zarur va yetarli bo‘ladi.

To‘g‘ri teorema $A \Rightarrow B$ ko‘rinishida bo‘lsa, teskari teorema $B \Rightarrow A$, qarama-qarshi teorema $\neg A \Rightarrow \neg B$ ko‘rinishida bo‘ladi. To‘g‘ri teoremaning rostligi teskari teoremaning rostligini kafolatlamaydi. Masalan, “vertikal burchaklar teng” - rost, lekin “teng burchaklar vertikaldir” - yolg‘on. Pifagor teoremasida esa ham to‘g‘ri, ham teskari teorema rost:

$$\angle C = 90^\circ \;\Leftrightarrow\; c^2 = a^2 + b^2 \qquad (5)$$

O‘quvchilarga har bir yangi teoremadan so‘ng uning teskarisini tuzish va rost yoki yolg‘onligini aniqlash topshirig‘ini berish mantiqiy madaniyatni shakllantirishning samarali vositasidir.

2. Mantiqiy fikrlashni rivojlantirish usullari

2.1. Analiz va sintez usuli

Analiz izlanayotgan natijadan uni ta’minlovchi shartlarga qarab, sintez esa ma’lum shartlardan natijaga qarab fikr yuritishdir. Darsda ularni alohida emas, birgalikda qo‘llash maqsadga muvofiq: yechim yo‘li analiz bilan topiladi, sintez bilan esa rasmiylashtiriladi.

Misol. Ixtiyoriy $a \geq 0$ va $b \geq 0$ sonlar uchun o‘rta arifmetik va o‘rta geometrik haqidagi tengsizlikni isbotlang:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \qquad (6)$$

Analiz (izlash bosqichi). O‘qituvchi savol beradi: “Bu tengsizlik qanday tengsizlikdan kelib chiqishi mumkin?” Ikkala tomonni 2 ga ko‘paytirib va barcha hadlarni bir tomonga o‘tkazib, quyidagini hosil qilamiz:

$$a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$$

Oxirgi tengsizlik har doim rost, chunki istalgan haqiqiy sonning kvadrati manfiy emas.

Sintez (isbotni yozish bosqichi). $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$ dan boshlab, qavsni ochamiz: $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$, bundan $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ va izlangan (6) tengsizlik kelib chiqadi. Tenglik faqat $a = b$ bo‘lganda bajariladi.

Bu misolda o‘quvchi analiz bosqichida o‘tishlar ekvivalent ekanligini ($\Leftrightarrow$) tekshirishi muhim. Aks holda u yolg‘on tasdiqdan rost natija chiqarib, “isbot qildim” deb o‘ylashi mumkin.

2.2. Induksiya va deduksiya

Induksiya xususiy hollardan umumiy xulosaga, deduksiya esa umumiy qoidadan xususiy holga qarab fikrlashdir. To‘liqsiz induksiya gipoteza yaratishning kuchli vositasi, lekin isbot emas. Buni o‘quvchilarga L. Eyler ko‘rib chiqqan ko‘phad misolida ko‘rsatish ta’sirli:

(cc) BY

$$f(n) = n^2 + n + 41 \qquad (7)$$

$n = 0,1,2,\dots,39$ qiymatlarda $f(n)$ tub son bo‘ladi: 41, 43, 47, 53, 61, … O‘quvchilar odatda 5-6 ta qiymatni tekshirib, “barcha qiymatlar tub” degan xulosaga keladilar. Ammo $n = 40$ da:

$$f(40) = 40^2 + 40 + 41 = 1681 = 41^2,$$

ya’ni murakkab son hosil bo‘ladi. Bu misol 40 ta muvaffaqiyatli tekshiruv ham umumiy qoidani isbotlamasligini yaqqol ko‘rsatadi.

Induksiyaning foydali tomonini ham ko‘rsatish kerak. O‘quvchilardan ketma-ket toq sonlar yig‘indisini hisoblash so‘raladi: $1 = 1$, $1 + 3 = 4$, $1 + 3 + 5 = 9$, $1 + 3 + 5 + 7 = 16$. Ular qonuniyatni o‘zlari topadilar:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \qquad (8)$$

So‘ngra bu gipoteza deduktiv yo‘l bilan isbotlanadi. Shunda o‘quvchi bilishning to‘liq siklini bosib o‘tadi: kuzatish → gipoteza → isbot.

2.3. Matematik induksiya usuli

Matematik induksiya prinsipi natural sonlar haqidagi tasdiqni isbotlashning deduktiv usulidir:

$$\Big(P(1) \ \wedge \ \forall k \in \mathbb{N} \ \big(P(k) \Rightarrow P(k+1)\big)\Big) \ \Rightarrow \ \forall n \in \mathbb{N} \ P(n) \qquad (9)$$

Metodik jihatdan uni “domino toshlari” modeli bilan tushuntirish qulay: birinchi tosh yiqiladi (induksiya bazasi) va har bir yiqilgan tosh keyingisini yiqitadi (induksiya qadami), demak, barcha toshlar yiqiladi.

Misol. Ixtiyoriy natural n uchun $n^3 + 5n$ ifoda 6 ga bo‘linishini isbotlang.

Baza: $n = 1$ da $1 + 5 = 6$, 6 ga bo‘linadi.

Qadam: $n = k$ da $k^3 + 5k$ ifoda 6 ga bo‘linsin deb faraz qilamiz. $n = k + 1$ da:

$$(k+1)^3 + 5(k+1) = (k^3 + 5k) + 3k(k+1) + 6$$

Birinchi qo‘shiluvchi faraz bo‘yicha 6 ga bo‘linadi. $k(k+1)$ ketma-ket ikki natural sonning ko‘paytmasi bo‘lgani uchun juft, demak, $3k(k+1)$ ham 6 ga bo‘linadi. 6 ham 6 ga bo‘linadi. Demak, butun yig‘indi 6 ga bo‘linadi.

O‘quvchilarga bazasiz “isbot” ham ko‘rsatiladi: “$n = n + 1$” tasdig‘ida qadam bajariladi (ikkala tomonga 1 qo‘shilsa, tenglik saqlanadi), lekin baza yolg‘on. Bu ikkala shartning ham zarurligini tushunishga yordam beradi.

2.4. Teskarisini faraz qilish usuli

Bu usul (1) kontrapozitsiya qonuniga asoslanadi: isbotlanishi kerak bo‘lgan tasdiqning inkori faraz qilinadi va undan ziddiyat keltirib chiqariladi.

Misol. $\sqrt{2}$ irratsional son ekanligini isbotlang.

Faraz qilaylik, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ bo‘lsin, bu yerda p va q - o‘zaro tub natural sonlar. U holda:

$$p^2 = 2q^2$$

(cc) BY

Demak, p^2 juft, bundan p juft: $p = 2m$. O‘rniga qo‘ysak, $4m^2 = 2q^2$, ya’ni $q^2 = 2m^2$, demak, q ham juft. p va q ikkalasi ham 2 ga bo‘linadi - bu ularning o‘zaro tubligiga zid. Demak, farazimiz noto‘g‘ri va $\sqrt{2}$ irratsional.

Darsda o‘quvchilarga isbotning har bir qadami qaysi qoidaga asoslanganini so‘rash kerak. Masalan, “p^2 juft bo‘lsa, p juft” degan qadam ham o‘z navbatida kontrapozitsiya orqali isbotlanadi: agar p toq bo‘lsa, p^2 ham toq.

2.5. Kontrmisol tuzish usuli

O‘quvchilarga ataylab yolg‘on umumiy tasdiqlar beriladi va ularni rad etuvchi misol topish so‘raladi. Bu usul (4) qoidani amalda mustahkamlaydi.

2-jadval.

Yolg‘on tasdiqlar va ularning kontrmisollari

Tasdiq	Kontrmisol
Agar $a > b$ bo‘lsa, $a^2 > b^2$ bo‘ladi	$a = 1, b = -2$: $1 > -2$, lekin $1 < 4$
Diagonallari teng to‘rtburchak - to‘g‘ri to‘rtburchak	Teng yonli trapetsiya
Ikki irratsional sonning yig‘indisi irratsional	$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$
Har qanday uzluksiz funksiyaning hosilasi mavjud	$f(x) = \|x\|$ funksiya $x = 0$ nuqtada
Agar $a \cdot b > 0$ bo‘lsa, $a > 0$ va $b > 0$	$a = -2, b = -3$

Kontrmisol topgan o‘quvchidan tasdiqni qanday tuzatish mumkinligini ham so‘rash foydali. Masalan, birinchi tasdiq $a > b \geq 0$ shartida rost bo‘ladi.

2.6. Analogiya va umumlashtirish

Analogiya ma’lum faktni yangi vaziyatga ko‘chirishdir. Masalan, tekislikdagi Pifagor teoremasidan to‘g‘ri burchakli parallelepiped diagonali formulasiga o‘tish:

$$d^2 = a^2 + b^2 \quad \rightarrow \quad d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \qquad (10)$$

O‘quvchi avval asosning diagonalini, so‘ngra fazoviy diagonalni topib, analogiyani isbot bilan tasdiqlaydi. Analogiya ham induksiya kabi faqat gipoteza beradi, uni isbotlash shart ekanligini har safar ta’kidlash lozim.

2.7. Eyler-Venn diagrammalari va mantiqiy masalalar

To‘plamlar orasidagi munosabatlar mantiqiy amallarning ko‘rgazmali modeli bo‘lib xizmat qiladi: kesishma - kon’yunksiyaga, birlashma - diz’yunksiyaga, to‘ldiruvchi - inkorga mos keladi. Ikki to‘plam uchun kiritish-chiqarish formulasi:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \qquad (11)$$

Masala. Sinfda 30 o‘quvchi bor. Ulardan 18 tasi shaxmat, 15 tasi futbol to‘garagiga qatnashadi, 7 tasi ikkala to‘garakka qatnashadi. Nechta o‘quvchi hech bir to‘garakka qatnashmaydi?

Yechim: $n(A \cup B) = 18 + 15 - 7 = 26$, demak, $30 - 26 = 4$ o‘quvchi hech bir to‘garakka qatnashmaydi. O‘quvchilar odatda $18 + 15 = 33 > 30$ natijasidan “masalada xato bor” degan xulosaga keladilar. Diagramma bu xatoning sababini ko‘rsatadi: kesishmadagi 7 o‘quvchi ikki marta sanalgan.

(cc) BY

Foydalanilgan adabiyotlar

1. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4708-son qarori. 2020-yil 7-may.

2. Tosheva N.A. Maktab matematikasini o’qitishda Ibn Sino ijodidan foydalanish // Science and Education. – 2021. – Т. 2. – №. 11. – С. 651-662.

3. Tosheva N.A. Kantorning mukammal toplami va uning olchovi mavzusini oqitishda ayrim interfaol usullar // Science and Education 2.11 (2021): 901-910.

4. Tosheva N.A., Shodiyev M.U. Musbat sonlar uchun Chisini, Heronian, Lehmer, Stolarskiy va boshqa o’rta qiymatlar // Science and Education. – 2021. – Т. 2. – №. 10. – С. 24-38.

5. Rasulov T., Kurbonov G. Effective use of digital learning technologies in the educational process // AIP Conference Proceedings, 2901:1 (2023), art. no. 030007.

6. Rasulov T.H., Umarova U.U. The role of modern information and communication technologies in the organization of distance education // AIP Conference Proceedings, 2901:1 (2023), art. no. 030008.

7. Rasulov T.Kh. Innovative technologies for studying the topic of linear integral equations // Science, technology and education 73:9 (2020), pp. 74-76.

8. Расулов Т.Х. О ветвях существенного спектра решетчатой модели спин-бозона с не более чем двумя фотонами // Теоретическая и математическая физика, 186:2 (2016), С. 293-310.

9. Расулов Т.Х. Асимптотика дискретного спектра одного модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке // Теоретическая и математическая физика. 163:1 (2010), С. 34-44.

10. Расулов Т.Х., Дилмуродов Э.Б. Бесконечность числа собственных значений операторных (2x2)-матриц. Асимптотика дискретного спектра // Теоретическая и математическая физика 205:3 (2020), 368-390.

11. Rasulov T.H., Dilmurodov E.B. Essential spectrum of a 2x2 operator matrix and the Faddeev equation // European science 51:2 (2020), pp.7-10.

12. Lakaev S.N., Rasulov T.Kh. Efimov's effect in a model of perturbation theory of the essential spectrum // Functional Analysis and its Applications 37:1 (2003), pp. 69-71.

13. Расулов Т.Х. О числе собственных значений одного матричного оператора // Сибирский математический журнал. 52:2 (2011), С. 400-415.

14. Бахронов Б.И., Мансуров Т.З. Вычисление существенного спектра обобщенной модели Фридрихса в системе MAPLE // Наука, техника и образование. 2-2 :77 (2021), стр. 35-38.

15. Dilmurodov E.B., Bahronov B.I., Khayitova Kh.G., Kurbonov G.G., Norchayev R.T. On the eigenvalues of the lattice spin-boson model with at most one photon // E3S Web of Conferences. 587 (2024), art. no. 01002.

16. Bahronov B., Ashurova D., Bobokulov O., Navruzova M., Ikramova A. Spectrum of Friedrichs models tensor sum // AIP Conference Proceedings 3498:1 (2026), art. no. 050045.

17. Jurakulova F. Estimates for the lower and upper bounds of the essential spectrum of a 3x3 operator matrix // AIP Conf. Proc. 3377:1 (2025), art. no. 030018.

18. Ismoilova D.E. To'rt o'lchamli qo'zg'alishga ega ikki kanalli molekulyar-rezonans modelining muhim va diskret spektrlari // Scientific progress. 2:3 (2021), 44-50 b.

19. Ismoilova D.E. To'rt o'lchamli qo'zg'alishga ega ikki kanalli molekulyar-rezonans modelining rezolventasi // Scientific progress. 2:3 (2021), 143-152 b.

20. Tosheva N.A., Ismoilova D.E. Ikki kanalli molekulyar-rezonans modelining sonli tasviri // Scientific progress. 2:1 (2021), 1421-1428 b.