Принцип Гаусса для систем с неидеальными связями в случае возможных перемещений, удовлетворяющих расширенному методу комбинирования связей

Журагул Хамрокуловна Манглиева
Мадина Кодир кизи Кобилова
Навоийский государственный горный технологический университет
Алишер Давлатович Ибрагимов
Томский государственный университет

Аннотация: В этой статье рассматривается вопрос распространения расширенного метода комбинирования связей на неголономные системы с неидеальными связями. Получены дифференциальные уравнения движения механической системы, которые обладают тем свойством, что из этих уравнений можно получить явные выражения сил связей, не зависящие от сил трения. Даётся обобщение принципа наименьшего принуждения Гаусса для систем с неидеальными связями (для систем с трением) в случае, когда возможные перемещения удовлетворяют условиям расширенного метода комбинирования связей.

Ключевые слова: принцип Гаусса, неидеальные связи, перемещения, комбинированные связи

The Gauss principle for systems with non-ideal constraints in the case of possible displacements that satisfy the extended method of combining constraints

Zhuragul Khamrokulovna Manglieva
Madina Kodir kizi Kobilova
Navoi State Mining Technological University
Alisher Davlatovich Ibragimov
Tomsk State University

Abstract: This article considers the issue of extending the extended constraint combination method to nonholonomic systems with nonideal constraints. Differential equations of motion of a mechanical system are obtained, which have the property that from these equations it is possible to obtain explicit expressions for the forces of bonds that do not depend on the forces of friction. A generalization of the Gauss

principle of least constraint for systems with non-ideal constraints (for systems with friction) is given in the case when possible displacements satisfy the conditions of the extended method of combining constraints.

Keywords: Gaussian principle, non-ideal constraints, displacements, combined constraints

Рассмотрим механическую систему из N материальных точек M_K ($k=1,2,...,N$) с массами m_k , положение которых относительно инерциальной декартовой системы координат определяется радиус-векторами $\vec{r}_k(x_\gamma)$ ($\gamma=1,2,...3N$). Система находится под действием заданных сил $\vec{F}_k(X_\gamma)$ и стеснена совместными и независимыми связями, среди которых имеются как геометрические

$$f_\alpha(x_1,x_2,...,x_{3N},t)=0 \ \ (\alpha=1,...,a), \tag{1}$$

так и кинематические, вообще говоря, нелинейные

$$\varphi_\beta(x_\gamma,\dot{x}_\gamma,t)=0 \ \ (\beta=1,...,b). \tag{2}$$

Возможные перемещения, допускаемые связями, определим независимыми соотношениями

$$\sum_{\gamma=1}^{3N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\gamma}\delta x_\gamma=0, \ \sum_{\gamma=1}^{3N}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{x}_\gamma}\delta \dot{x}_\gamma=0. \tag{3}$$

Если ввести обобщенные координаты $q_1,q_2,...,q_n\,(n=3N-a)$ с учетом уравнений связей (1), то многообразия допустимых состояний системы можно представить в виде

$$x_\gamma=a_\gamma(q_i,t), \ \dot{x}_\gamma=b_\gamma(q_i,p_j,t) \tag{4}$$

где p_j ($j=1,2,...r;$ $r=3N-(a+b)$) - независимые скоростные параметры; $(i=1,2,...n)$. Вариации декартовых координат можно выразить через произвольные независимые величины $\delta\pi_j$ (квазикоординаты) следующим образом:

$$\delta x_\gamma=\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial b_\gamma}{\partial p_j}\delta\pi_j. \tag{5}$$

Предположим, что сумма элементарных работ сил реакций $\vec{R}_k$ на любом возможном перемещении отлична от нуля

$$\sum_{k=1}^{N}\vec{R}_k\delta\vec{r}_k\neq 0. \tag{6}$$

Известно, что связи в этом случае будут относиться к связям с трением.

Реакцию связи $\vec{R}_k$, действующую на точку M_k, разложим на две составляющие силы $\vec{R}_k^{\tau}$ и $\vec{R}_k^{n}$, обладающие следующими свойствами:

1. На всяком возможном перемещении системы $\delta\vec{r}_k$

$$\sum_{k=1}^{N}\vec{R}^{n}{}_k\delta\vec{r}_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{N}\vec{R}_k^{\tau}\delta\vec{r}_k \neq 0. \qquad (7)$$

2. Перемещение системы, при котором каждая точка M_k получает перемещение $\frac{\vec{R}_k^{\tau}}{m_k}\delta t$, есть возможное перемещение.

Силу $\vec{R}_k^{n}$ называют силой связи, силу $\vec{R}_k^{\tau}$ - силой трения. Эти силы имеют следующий вид:

$$R_{\gamma}^{n} = \sum_{\alpha=1}^{a}\lambda_{\alpha}\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_{\gamma}} + \sum_{\beta=1}^{b} u_{\beta}\frac{\partial\varphi_{\beta}}{\partial\dot{x}_{\gamma}},$$

$$R_{\gamma}^{\tau} = \sum_{j=1}^{r}\mu_j\frac{\partial(m_{\gamma}\dot{x}_{\gamma})}{\partial p_j},$$

где $\lambda_{\alpha}, u_{\beta}$ и μ_j - некоторые коэффициенты.

Покажем, что если в какой-то момент времени известны положения и скорости точек системы, а также действующие на эти точки активные силы $\overline{F}_k$, то силы связей $\vec{R}_k^{n}$ определяются и будут одними и теми же, независимо от того, обладает ли данная система трением или нет. Чтобы показать это, запишем уравнения движения точек системы в следующем виде

$$\ddot{x}_{\gamma} = \frac{1}{m_{\gamma}}\left(X_{\gamma} + \sum_{\alpha=1}^{a}\lambda_{\alpha}\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_{\gamma}} + \sum_{\beta=1}^{b}u_{\beta}\frac{\partial\varphi_{\beta}}{\partial\dot{x}_{\gamma}} + \sum_{j=1}^{r}\mu_j\frac{\partial(m_{\gamma}\dot{x}_{\gamma})}{\partial p_j}\right). \qquad (8)$$

Дифференцируя по времени уравнения (1) два раза, а уравнения (2) - один раз, и подставляя вместо $\ddot{x}_{\gamma}$ значения из (8), получим систему $a+b$ линейных уравнений, позволяющих определить множители $\lambda_{\alpha}, \mu_{\beta}$ как функции координат x_{γ}, скоростей $\dot{x}_{\gamma}$, времени t, а также заданных сил X_{γ}. Члены же, содержащие силы трения, входить не будут, так как для них будут выполнены условия

$$\sum_{\gamma=1}^{3N}\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_{\gamma}}\sum_{j=1}^{r}\mu_j\frac{\partial\dot{x}_{\gamma}}{\partial p_j} = \sum_{j=1}^{r}\mu_j\left(\sum_{\gamma=1}^{3N}\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_{\gamma}}\frac{\partial\dot{x}_{\gamma}}{\partial p_j}\right) = 0,$$

$$\sum_{\gamma=1}^{3N}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_\gamma}\sum_{j=1}^{r}\mu_j\frac{\partial\dot{x}_\gamma}{\partial p_j}=\sum_{j=1}^{r}\mu_j(\sum_{\gamma=1}^{3N}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_\gamma}\frac{\partial\dot{x}_\gamma}{\partial p_j})=0$$

В результате введения скоростных параметров, величины f_α и φ_β обратятся тождественно в ноль. Производные от левых частей этих тождеств по p_j также тождественно равны нулю. Поэтому скобки в последних выражениях равны нулю. Из системы $a+b$ линейных уравнений величины λ_α и u_β определяются независимо от сил трения.

Будем считать, что экспериментальные данные определяют μ_j в функции λ_α и u_β, то есть будем считать, что закон трения известен.

Таким образом, если считать закон трения известным, то для описания движения системы к уравнениям (8) должны быть присоединены $a+b$ уравнений связей (1), (2) и r соотношений, получаемых из закона трения, выражающих μ_j в виде некоторых функций времени, координат и скоростей точек системы, а также заданных сил.

Сообщая системе произвольное возможное перемещение, в силу условия (7), получим уравнение:

$$\sum_{k=1}^{N}(\vec{F}_k+\vec{R}_k^\tau-m_k\vec{w}_k)\delta\vec{r}_k=0 \quad (9)$$

выражающее собой общее уравнение динамики для рассматриваемых систем с неидеальными связями.

Применительно к системам с трением уравнение (9) представляет собой необходимое и достаточное условие соответствия заданным силам совместимого со связями движения системы при известном законе трения системы. Рассмотрим вопрос применимости принципа Гаусса для систем с неидеальными связями (связи с трением) в случае образования возможных перемещений, которые были предложены в предыдущем

Для этого дифференцируя по времени уравнения (1) два раза, а уравнения (2) один раз, получим:

$$\sum_{\gamma=1}^{3n}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\gamma}\ddot{x}_\gamma+A_\alpha=0 \qquad (\alpha=1,...,a), \quad (10)$$

$$\sum_{\gamma=1}^{3n}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{x}_\gamma}\ddot{x}_\gamma+B_\beta=0 \qquad (\beta=1,...,b), \quad (11)$$

где $A_\alpha\, u\, B_\beta$, члены, не содержащие ускорений, а $\ddot{x}_\gamma$ - действительные ускорения точек системы.

Обозначим через $\ddot{x}'_\gamma$ кинематически возможные ускорения, то есть ускорения, совместимые со связями (1) и (2). Последние будут удовлетворять условиям:

$$\sum_{\gamma=1}^{3n} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\gamma} \ddot{x}'_\gamma + A_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1,..., a), \tag{12}$$

$$\sum_{\gamma=1}^{3n} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{x}_\gamma} \ddot{x}'_\gamma + B_\beta = 0 \quad (\beta = 1,..., b). \tag{13}$$

Поскольку $A_\alpha \; u \; B_\beta$ являются функциями времени, координат и скоростей, то из (9); (12), (13) получим

$$\delta \ddot{x}_\gamma = \ddot{x}_\gamma - \ddot{x}'_\gamma ,$$

$$\sum_{\gamma=1}^{3n} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\gamma} \delta \ddot{x}_\gamma = 0 ,$$

$$\sum_{\gamma=1}^{3n} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{x}_\gamma} \delta \ddot{x}_\gamma = 0 . \tag{14}$$

Сравнивая эти выражения с условиями на возможные перемещения (3), видим, что вариации ускорений удовлетворяют тем же условиям, что и возможные перемещения. Поэтому из (9) получим:

$$\sum_{\gamma=1}^{3n} \left(m_\gamma \ddot{x}_\gamma - X_\gamma - R_\gamma^\tau \right) \left(\ddot{x}_\gamma - \ddot{x}'_\gamma \right) = 0 . \tag{15}$$

Движение системы, которое она будет совершать под действием заданных сил $\overline{F}_k$ и сил, равных силам трения $\vec{R}_k^\tau$, будем называть действительным освобожденным движением. Ускорения точек в действительном освобожденном движении обозначим через a_γ ($\gamma = 1,2,...,3N$) Поскольку общее уравнение динамики справедливо и для освобожденной системы, то имеет место выражение:

$$\sum_{\gamma=1}^{3n} \left(m_\gamma a_\gamma - X_\gamma - R_\gamma^\tau \right) \left(\ddot{x}_\gamma - \ddot{x}'_\gamma \right) = 0 . \tag{16}$$

Вычитая теперь (15) из (16), получим

$$\sum_{\gamma=1}^{3n} m_\gamma \left[\left(\ddot{x}_\gamma - a_\gamma \right) \left(\ddot{x}_\gamma - \ddot{x}'_\gamma \right) \right] = 0 . \tag{17}$$

Последнее соотношение можно преобразовать к виду:

$$\sum m_\gamma\left[\left(\ddot{x}_\gamma - a_\gamma\right)\left(\ddot{x}_\gamma - \ddot{x}'_\gamma\right)\right] = \sum \frac{m_\gamma}{2}\left[\begin{matrix}\left(\ddot{x}_\gamma^2 - 2\ddot{x}_\gamma\ddot{x}'_\gamma + x'^2_\gamma\right) - \left(\ddot{x}'^2_\gamma - 2\ddot{x}'_\gamma a_\gamma + a_\gamma^2\right) + \\ +\left(a_\gamma^2 - 2\ddot{x}_\gamma a_\gamma + \ddot{x}_\gamma^2\right)\end{matrix}\right]. \quad (18)$$

Если ввести теперь меры отклонения [5] (определение по Гауссу)

$$A_{dD} = \sum \frac{m_\gamma}{2}(\ddot{x}_\gamma - a_\gamma)^2,$$

$$A_{\mu g} = \sum \frac{m_\gamma}{2}(a_\gamma - \ddot{x}'_\gamma)^2,$$

$$A_{d\mu} = \sum \frac{m_\gamma}{2}(\ddot{x}_\gamma - \ddot{x}'_\gamma)^2,$$

то из (18) получим

$$A_{d\mu} + A_{dD} - A_{\mu g} = 0. \quad (19)$$

Так как каждое слагаемое последнего соотношения неотрицательно, то должны выполняться условия

$$A_{d\mu} \le A_{\mu g},\ A_{dD} \le A_{\mu g}. \quad (20)$$

Второе из этих неравенств представляет собой обобщение принципа наименьшего принуждения Гаусса для систем с неидеальными связями. Согласно этому принципу, среди возможных ускорений действительные ускорения точек системы с неидеальными связями обращают в минимум функцию

$$A_{d\mu} = \frac{1}{2}\sum_{\gamma=1}^{3n} m_\gamma\left(\ddot{x}_\gamma - \frac{X_\gamma + R_\gamma^\tau}{m_\gamma}\right)^2. \quad (21)$$

Таким образом, согласно полученному принципу Гаусса, среди всех мыслимых ускорений, действительные ускорения точек систем с трением обращают в минимум функцию (21) и наоборот, условия минимума функции (21) по ускорениям, удовлетворяющие условиям (10) и (11), приводят к дифференциальным уравнениям действительного движения системы с неидеальными связями

$$\ddot{x}_\gamma = \frac{1}{m_\gamma}\left(F_\gamma + \sum_{\alpha=1}^{a}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\gamma} + \sum_{\beta=1}^{b}u_\beta\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{x}_\gamma} + \sum_{j=1}^{r}\ \mu_j\frac{\partial(m_\gamma\dot{x}_\gamma)}{\partial p_j}\right). \quad (22)$$

Таким образом, в данной главе расширенный метод комбинирования связей распространен на неголономные системы с неидеальными связями. Показано, что для таких систем имеет место общее уравнение динамики, которое позволяет обобщить принцип наименьшего принуждения Гаусса.

Использованная литература

1. Манглиева Ж.Х., Ибрагимов А.Д Музаффарова З «The gauss principle for systems with non-ideal connections in the case of possible movements satisfying the extended method of combining connections» Proceeding of International Conference on Scientific Endeavors and opportunities Hosted from Telavi, Georgia on 17th -18th March, 2021 111-113 бет

2. Манглиева Ж.Х., Ибрагимов А.Д «Investigation of the Stability of Programmed Movements of the Speed Controller» Design Engineering ISSN: 0011-9342 | Year 2021 Issue: 9 | Pages: 3576 - 3583

3. Коршуова Н.А., Рузматов М., Манглиева Ж.Х., Ибрагимов А.Д "Аналитические решения для участков малой тяги в центральном ньютоновском поле" Journal of Advances in Engineering Technology Sept, 2020 Vol.1(1), Sept, 2020

4. Манглиева Ж.Х, Норов Г.М, Ибрагимов а.Д «Optimal stabilization of partial movements of the frictional speed controller in case of imprecise fulfillment of the conditional connection» American journal of economics and business management ISSN: 2576-5973 Vol. 3, No.5, November-December 2020

5. Коршунова Н.А.,Рузматов М Манглиева Ж.Х Ибрагимов А.Д Integrals for Intermediate Thrust Arcs in a Field of Two Fixed Centers Jour of Adv Research in Dynamical & Control Systems, Vol. 12, Special Issue-07, 2020

6. Базарова, С. Д., Байчаев, Ф. Х., & Манглиева, Ж. Х. (2018). Организация учебного процесса на основе интеграции обучения с производством. Вопросы науки и образования, (11 (23)), 38-39.

7. Мамадалиева, Н. А., & Суяров, Х. У. (2023). Кончилик саноатида янги технологияни жорий этиш ва унинг иқтисодий самарадорлигини баҳолаш йўли. Science and Education, 4(5), 789-795.

8. Mamadaliyeva, N. A. MACROECONOMIC IMPORTANCE USE AND CONSUMPTION OFPHOSPHATE FERTILIZERS. GWALIOR MANAGEMENT ACADEMY, 9.

9. Turdimovich, A. T., & Khasanovich, S. M. (2023). The study of air pollution at the present stage. Eurasian Journal of Engineering and Technology, 17, 71-75.

10. Sarikulov, M. K. (2023). Problems of Shortage of Drinking Water at the Present Stage. Web of Synergy: International Interdisciplinary Research Journal, 2(4), 873-880.

11. Сарикулов, М. Х., & Рискулов, Х. А. (2022). НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИАЦИИ И ЕГО ВЛИЯНИЕ НА ЗДОРОВЬЕ НАСЕЛЕНИЯ. Universum: технические науки, (2-1 (95)), 20-23.

12. Адилов, Т. Т., Сарикулов, М. Х., Матқобилов, А. К., & Шохрух, Д. Ў. М. (2022). Роль воспитании в формирование личности. Science and Education, 3(6), 572-580.

13. Каримкулов, К. М., Узаков, И. Э., & Сарикулов, М. Х. (2022). Роль химического состава пищевых продуктов в специальности химия товаров. Science and Education, 3(12), 309-314.

14. Uzoqqov, I. E., & Yusupov, B. B. O. G. L. (2023). Yong'oq yetishtirishda yetakchi mamlakatlarda zararkunandalarga qarshi kurashish chora tadbirlari. Science and Education, 4(5), 274-282.