Kvadrat tenglamalarni yechish yuzasidan ba'zi tavsiyalar

Ohista Sodiqjon qizi Soibova
Ilmiy rahbar: Nasriddin Nomozovich Raximov
O'zbekiston-Finlandiya pedagogika instituti

Annotatsiya: Mazkur maqolada kvadrat tenglamalarni bir nechta qulay usullarda yechish haqida ba'zi tavsiyalar va ularga oid misollar yechimlari keltirib o'tilgan.

Kalit so'zlar: ta'rif, teorema, isbot, keltirilgan kvadrat tenglama, to'la va chala kvadrat tenglamalar, discriminant, ildiz

Some recommendations for solving quadratic equations

Okhista Sadiqjon kizi Soibova
Scientific supervisor: Nasriddin Nomozovich Rakhimov
Uzbekistan-Finland Pedagogical Institute

Abstract: This article provides some recommendations and example solutions for solving quadratic equations in several convenient ways.

Keywords: definition, theorem, proof, given quadratic equation, complete and incomplete quadratic equations, discriminant, root

1) Kvadrat tenglamaning ta'rifi:

Ma'lumki, kvadrat tenglamalarni yechishning bir qancha usullari mavjud va ular o'tgan ming yillikning o'rtalarida topilgan. Quyida bularning barchasini batafsil ko'rib chiqishga harakat qilamiz: $3x^2-5x-2=0$ tenglamaning chap tomoni kvadrat uchhad, o'ng qismi esa nolga teng. Bunday tenglamalar kvadrat tenglamalar deyiladi.

Ta'rif: Kvadrat tenglama deb $ax^2+bx+c=0$ ko'rinishidagi tenglamaga aytiladi, bunda a, b, c - berilgan sonlar, $a\neq 0$, x esa noma'lum.

Agar $ax^2+bx+c=0$ kvadrat tenglamada b yoki c koeffitsiyentlardan kamida bittasi nolga teng bo'lsa, u holda bu tenglama chala kvadrat tenglama deyiladi.

Masalan; $2x^2 +3x =0$; $-3x^2+4=0$; $6x^2=0$**.** Ularning birinchisida $c=0$, b noldan farqli, ikkinchisida esa $b=0$, c noldan farqli, uchinchisida $b=0$, $c=0$**.** Bu tenglamalar chala kvadrat tenglamalarning har xil turlarini ifodalaydi.

Bosh koeffitsiyenti birga teng bo'lgan kvadrat tenglamalar keltirilgan kvadrat tenglamalar deyiladi. Agar yuqoridagi kvadrat tenglamaning har bir hadini bosh koeffitsiyentga bo'lib, hosil bo'lgan tenglamada ikkinchi koeffitsientni p bilan, ozod hadni q bilan belgilasak, u holda berilgan tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$x^2+px+q=0$.

Keltirilgan kvadrat tenglama ildizlarini topish haqidagi teorema mashhur fransuz matematigi Fransua Viyet (1540-1603) nomi bilan *Viyet teoremasi* deb ataladi.

Viyet teoremasi. Agar x_1, va x_2, lar $x^2 + px + q=0$ tenglamaning ildizlari bo'lsa, u holda

$x+x=-p$

$x \cdot x=q$

formulalar o'rinli, ya'ni keltirilgan kvadrat tenglama ildizlarining yig'indisi qarama-qarshi ishora bilan olingan ikkinchi koeffitsiyentga, ildizlarining ko'paytmasi esa ozod hadga teng.

2) Kvadrat tenglamalarni yechishning ba'zi usullari:

1-usul. Berilgan *tenglamani ko'paytuvchilarga ajratish usuli:*

Berilgan: $x^2 + 9x - 22 = 0$.

Yechish:

$x^2 + 9x - 22 = x^2 - 2x + 11x - 22 = x(x - 2) + 11(x - 2) = (x + 11)(x - 2)$.

Demak tenglamani quyidagicha qayta yozish mumkin:

$(x + 11)(x - 2) = 0$

Ifoda nolga teng bo'lganligi sababli, ko'paytuvchilardan kamida bittasi nolga teng bo'lishi kerak. Shuning uchun tenglama $x = 2$ da, hamda $x = - 11$ da nolga teng bo'ladi.

Javob: 2 va $- 11$ sonlari $x^2 + 9x - 22 = 0$ tenglamaning ildizi hisoblanadi.

2-usul. To'la kvadratga keltirish usuli.

Berilgan: $x^2 + 6x - 7 = 0$.

Ushbu tenglamani chap qismini to'la kvadratga keltiramiz.

$x^2 + 6x$ ni qoldiramiz $x^2 + 6x = x^2 + 2 \cdot 3x$. Bundan to'liq kvadratni olish uchun 9 ni qo'shib ayiramiz:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x + 3)^2$$

$x^2 + 6x - 7 = (x + 3)^2 - 9 - 7 = (x + 3)^2 - 16; \quad (x + 3)^2 = 16; \; x + 3 = 4$

$x + 3 = -4; \; x_1 = 1 \; x_2 = -7$

Javob: 1 va 2 raqamlari berilgan tenglamaning ildizlari bo'ladi.

3-usul. Kvadrat tenglamani diskriminantini topish orqali yechish:

Tenglamaning 2 qismini 4 ga ko'paytiramiz

$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,$

$((2ax)^2 + 2ax \cdot b + b^2) - b^2 + 4ac = 0,$

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac,$

$2ax + b = \pm \sqrt{} b^2 - 4ac,$

$2ax = - b \pm \sqrt{} b^2 - 4ac,$

$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; D = b^2 - 4ac

a) Berilgan: $4x^2 + 7x + 3 = 0$.

$a = 4, b = 7, c = 3, D = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 49 - 48 = 1$,

$D > 0$, 2ta turli xil ildiz;

$$X_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-7 \pm 1}{8};\ x = \frac{-7+1}{8}\ x_1 = -\frac{3}{4}\ x_2 = \frac{-7-1}{8}\ x_2 = -1$$

Bundan ko'rinadiki, diskriminant musbat holatida, ya'ni $b^2 - 4ac > 0$ da ,

$ax^2 + bx + c = 0$ tenglama 2 ta turli ildizga ega bo'ladi.

b) Berilgan: $4x^2 - 4x + 1 = 0$,

$a = 4, b = -4, c = 1, D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0$,

$D = 0$, *ikkita* bir xil ildizga ega;

$$x = \frac{-b}{2a}, x = -\frac{-4}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}$$

Disktiminant nolga teng bo'lganda. Ya'ni $b^2 - 4ac = 0$ *da*,

$ax^2 + bx + c = 0$ *tenglama* ikkita teng ildizga ega bo'ladi,

d) Berilgan: $2x^2 + 3x + 4 = 0$,

$a = 2, b = 3, c = 4, D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 9 - 32 = -13$, $D < 0$.

Ushbu kvadrat tenglama ildizga ega emas.

Shunday qilib, diskriminant noldan kichik bo'lganda, ya'ni $b^2 - 4ac < 0$ da,

$ax^2 + bx + c = 0$ tenglama ildizga ega bo'lmaydi.

4-usul. Tenglamalarni Viyet teoremasi yordamida yechish.

Ma'lumki, keltirilgan kvadrat tenglama quyidagi ko'rinishga ega

$x^2 + px + c = 0$; *(1)* $a=1$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases} (1)$$

Bundan quyidagi xulosalar chiqarishimiz mumkin:

a) Yuqoridagi *(1)* tenglamaning q hadi musbat $(q > 0)$ bo'lsa, tenglama bir xil belgili ikkita ildizga ega bo'ladi va bu p ikkinchi koeffitsientga bog'liq. Agar p musbat bo'lsa, ikkala ildiz manfiy, agar p manfiy bo'lsa, ikkala ildiz ham musbatdir.

Masalan;

$x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_1 = 2$ *va* $x_2 = 1$, chunki $q = 2 > 0$ *va* $p = -3 < 0$;

$x^2 + 8x + 7 = 0$; $x_1 = -7$ va $x_2 = -1$, chunki $q = 7 > 0$ *va* $p = 8 > 0$.

b) Yuqoridagi *(1)* tenglamaning q erkin hadi manfiy $(q<0)$ bo'lsa, tenglamaning ikki xil ishorali ildizi bo'ladi va kattaroq ildiz $p<0$ bo'lsa musbat, $p>0$ bo'lsa manfiy bo'ladi.

Masalan;

$x^2 + 4x - 5 = 0$; $x_1 = -5$ va $x_2 = 1$, $q = -5 < 0$ va $p = 4 > 0$;

$x^2 - 8x - 9 = 0$; $x_1 = 9$ va $x_2 = -1$, $q = -9 < 0$ va $p = -8 < 0$.

5-usul. Tenglamalarni "o'tkazish" usuli yordamida yechish.

Quyidagi tenglamani ko'ramiz

$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0.$

Uning ikkala qismini a ga ko'paytirib, quyidagi tenglamani olamiz

$a^2x^2 + abx + ac = 0.$

$ax = y$ bo'lsin, bundan $x = \frac{y}{a}$; keyin quyidagi tenglamaga kelamiz

$y^2 + by + ac = 0,$

Uning y_1 va y_2 ildizlarini Viyet teoremasi yordamida topamiz.

va so'ngida:

$x_1 = \frac{y_1}{a}$ va $x_2 = \frac{y_2}{a}$ ildizlarga ega bo'lamiz.

Bu usulni Viyet teoremasi orqali berilgan tenglamaning ildizlarini topish oson bo'lganda va albatta, diskriminant aniq kvadrat bo'lganda qo'llash qulaydir.

Misol.

Berilgan: $2x^2 - 11x + 15 = 0.$

Yechim. Yuqorida ko'rilgan tartibda "o'tkazamiz".

$y^2 - 11y + 30 = 0.$

Viyet teoremasiga ko'ra

$\begin{cases} y = 5 \\ y = 6 \end{cases} \begin{cases} x = 5/2 \\ x = 6/2 \end{cases} \begin{cases} x = 2{,}5 \\ x = 3 \end{cases}$

Javob: 2,5; 3.

6-usul. Kvadrat tenglamalarni uning xossalari orqali yechish:

Quyidagi kvadrat tenglama berilgan bo'lsin.

$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0.$

1) Agar $a + b + c = 0$ (ya'ni a, b, c koeffitsientlar yig'indisi nolga teng bo'lsa), $x_1 = 1$, $x_2 = c/a$.

Isbot. Biz tenglamaning ikkala tomonini $a \neq 0$ ga bo'lamiz, va keltirilgan kvadrat tenglamaga ega olamiz

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

Viyet teoremasiga ko'ra: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

Shart bo'yicha $a - b + c = 0$, $b = a + c$. Shunday qilib,

$x_1 = -1$ va $x_2 = \frac{c}{a}$ bu isbot qilinishi kerak bo'lgan tenglik edi.

Misol.

1) Berilgan: $345x^2 - 137x - 208 = 0.$

Yechim. $a + b + c = 0$ bo'lganligi uchun $(345 - 137 - 208 = 0)$,

$x_1 = 1; x_2 = c/a = -208/345.$

Javob: 1; -208/345.

2) Berilgan: $132x^2 - 247x + 115 = 0.$

Yechim. $a + b + c = 0$ bo'lganligi uchun $(132 - 247 + 115 = 0)$,

$x_1 = 1, x_2 = c/a = 115/132.$

Javob: *1; 115/132*

Keltirilgan tenglamalar

$x^2 + px + q= 0$

$a = 1, b = p$ va $c = q$ bo'lgan umumiy tenglamaga to'g'ri keladi. Shunday qilib, keltirilgan kvadrat tenglama ildizlari uchun formula

$$x_{12} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{4a};\ x_{12} = \frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2};\ x_{12} = -\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

ko'rinish qabul qiladi:

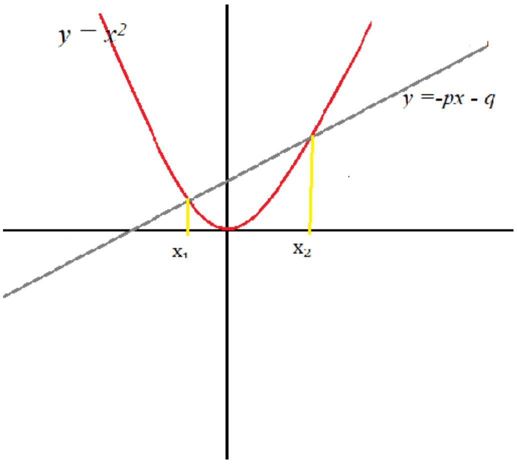
Formula dan ayniqsa p juft son bo'lganda foydalanish qulay

Misol. Berilgan: $x^2 - 14x - 15 = 0.$

Yechim. $\mathrm{x}_{12} = -\frac{14}{2} \pm \sqrt{7^2 + 15} = -7 \pm 8;\ \mathrm{x}_1 = 1\ \mathrm{x}_2 = -15$

Javob: $x_1 = 15; x_2 = -1$

7-usul. Grafik usul bilan yechish.



1-rasm

Agar tenglamada

$x^2 + px + q = 0$

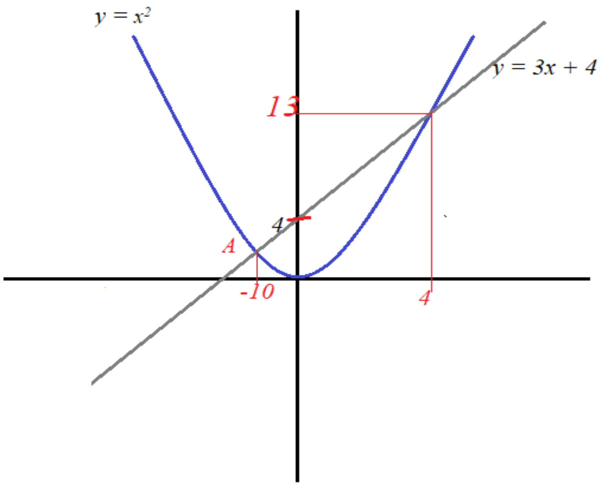
ikkinchi va uchinchi hadini o'ng tomonga ko'chirsak:

$x^2 = - px - q.$

2 ta bog'liq grafik chizishimiz mumkin: $y = x^2$ va $y = - px - q.$

Birinchi bog'liqlikning grafigi koordinata boshidan o'tuvchi paraboladir. Ikkinchi bog'liqlikning grafigi to'g'ri chiziqdir (1-rasm), uning uchun berilgan quyidagi holatlar bo'lshi mumkin:

1) Bu to'g'ri chiziq va parabola ikki nuqtada kesishishi mumkin, kesishish nuqtalarining absissalari kvadrat tenglamaning ildizlari:



2-rasm

2) Chiziq va parabola tegishi mumkin (faqat bitta umumiy nuqtada), ya'ni tenglama bitta yechimga ega;

3) To'g'ri chiziq va parabolaning umumiy nuqtalari yo'q, ya'ni. kvadrat tenglamaning ildizi yo'q.

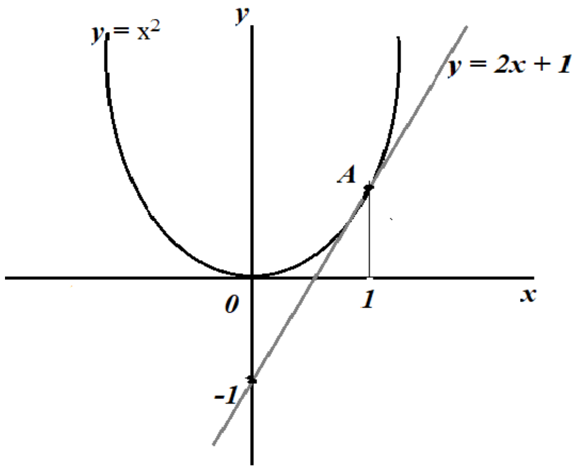
Misollar.

1) Quyida berilgan kvadrat tenglamani grafik usulida yeching: $x^2 - 3x - 4 = 0$ (2-rasm).

Yechim. Tenglamani $x^2 = 3x + 4$ ko'rinishda yozib olamiz.

Parabolani chizamiz y = x^2 va chiziqli funksiya y = 3x + 4 ni.

$y = 3x + 4$ to'g'ri chizig'ini 2ta nuqta orqali chizish mumkin: $M (0; 4)$ va $N (3; 13)$. Parabola va to'g'ri chiziq 2 ta nuqtada kesishadi A va B, $x_1 = -1$ va $x_2 = 4$. absissalarda. Javob: $x_1 = -1$; $x_2 = 4$.



3-rasm

2) Kvadrat tenglamani grafik usulda yechamiz (3-rasm) $x^2 - 2x + 1 = 0$.

Yechim. Tenglamani $x^2 = 2x - 1$ ko'rinishda yozib olamiz

Parabola va to'g'ri chiziqni chizib olamiz.

$y = 2x - 1$ to'g'ri chiziqni 2 nuqta orqali chizib olamiz: $M (0; - 1)$ va $N(1/2; 0)$. Parabola va to'g'ri chiziq A nuqtada

$x = 1$. absissa nuqtasida kesishadi. *Javob:* $x = 1$.

8-usul. Kvadrat tenglamani Gorner sxemasi yordamida yechish

Gorner sxemasi yordamida yuqori darajali tenglamalarni yechish mumkin, xususan kvadrat tenglamalarni ham. Sxema asosida ildizlarini topishimiz mumkin.

a_0	a_1	a_2	…	a_{n-1}	a_n
a_0	$a_1 + ab_0$	$a_2 + ab_1$	…	$a_{n-1} + \alpha b_{n-2}$	$a_n + \alpha b_{n-1}$
b_0	b_1	b_2	...	b_{n-1}	r

Bu usulni quyidagi misol orqali ko'ramiz

$5x^2 - x - 4 = 0$; $a = 5$; $b = -1$; $c = -4$

Yechish: Bu teglamaning ildizlarini ozod sonning bo'luvchilaridan qidiramiz. c = -4: $x \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$

	5	-1	-4
X =-1	5	-6	2
X = 2	5	9	14
X = 1	5	4	0

Ushbu tartib qoldiq nolga teng bo'lguncha davom ettiriladi. Qoldiq nolga teng bo'lgandagi x qiymati tenglamaning dastlabki ildizi bo'ladi.

Ikkinchi ildizini $x=1$ bo'lganda hosil bo'lgan koeffitsiyentlar orqali chiziqli tengama tuzib topamiz;

$5x + 4 = 0$

$x_2 = -\frac{4}{5}$ *Javob:* $1, \frac{-4}{5}$

9-usul. Belgilash usuli:

Bu usul kvadrat tenglama ildizini topishning noodatiy, yangi usuli bo'lib, viyetdan kelib chiqishini ko'rishimiz mumkin. Buning uchun berilgan tenglama keltirilgan bo'lishi kerak. Tenglama keltirilgan bo'lmasa, ($ax^2+bx+c=$) uni daslabki koeffitsiyentga bo'lib olamiz.

Bizga $ax^2+bx+c=0$ tenglama berilgan bo'lsin:

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = q$; $\left(\frac{b}{2a} - u\right) \cdot \left(\frac{b}{2a} + u\right) = \frac{c}{a}$

$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - u^2 = \left(\frac{c^2}{a^2}\right)$ $u=?$

$x_1 = \frac{b}{2a} + u$; $x_2 = \frac{b}{2a} - u$

Misol: $x^2 - 12x + 32 = 0$

$\left(\frac{12}{2} - u\right)\left(\frac{12}{2} + a\right) = 32$; $(6 - u)(6 + u) = 32$

$36 - u^2 = 32$ $u = 2, u = -2$

$x_1 = 6 + u = 6 + 2 = 8$, $x_2 = 6 - 2 = 4$

Javob: 8, 4

Misol: $6x^2 - x - 5 = 0$

$x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{5}{6} = 0$

$(\frac{1}{12} - u)\ (\frac{1}{12} + u) = -\frac{5}{6}\ \frac{1}{144} - u^2 = -\ \frac{5}{6}$

$u_{12} = \frac{121}{144};\ u = \pm\frac{11}{12}$

$x_1 = \frac{1}{12} - \frac{11}{12} = -\frac{5}{6}\ x_2 = \frac{1}{12} + \frac{11}{12} = 1$

Javob: 1, $-\frac{5}{6}$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Algebra. 8-sinf (Sh. Alimov, O. Xolmuhamedov, M.A. Mirzaahemdov. 2010)

2. Algebra 7-sinf uchun darslik (Sh.O Alimov, Yu.M.Kolyagin, Yu.V Sidorov, M.I Shabunin) T., ‘‘O‘qituvchi’’, 1996 yil.

3. Alixonov S. ‘‘Matematika darslarida umumlashtiris’’ T., ‘‘O‘qituvch’’, 1989-yil.

4. Algebra va analiz asoslari: o’rta maktablarning 10-11-sinflari uchun darslik

5. Sh.O. Alimov, Yu.M.Kolyagin, Yu.V Sidorov, M.I Shabunin) T., ‘‘O‘qituvchi’’, 1996 yil.