Kompleks argumentli trigonometrik funksiyalar

E.N.Sattorov
O.U.Pulatov
B.I.Xoliqov
bekboyxoliqov@gmail.com
O'zbekiston-Finlandiya pedagogika instituti

Annotatsiya: Bu maqola algebraik ko'rinishdagi kompleks sonlarni trigonometrik funksiyalar va mavhum ko'rsatkichli funksiyalar o'rtasidagi bog'lanishni ifodalaydi.

Kalit so'zlar: kompleks son, Eyler formulasi

Trigonometric functions with complex arguments

E.N.Sattorov
O.U.Pulatov
B.I.Kholikov
bekboykholikov@gmail.com
Uzbekistan-Finland Pedagogical Institute

Abstract: This article represents the connection between complex numbers in algebraic form, trigonometric functions and abstract exponential functions.

Keywords: complex number, Euler's formula

Trigonometrik funksiyalar

Algebraik ko'rinishdagi kompleks $z = x + iy$ sonni $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$ ko'rinishida ifodalasak va $x = 0$ desak,

$$\begin{cases} e^{iy} = \cos y + i\sin y \\ e^{-iy} = \cos y - i\sin y \end{cases}$$

tengliklarga ega bo'lib,bundan

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$ [1] (1)

[1] Sattorov Ermamat Norqulovich Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi (amaliy mashg'ulotlar). O'quv qo'llanma. –Samarqand: SamDU, 2021

bular Eyler formulalari deb ataladi. Ular trigonometrik va mavhum ko'rsatkichli funksiyalar o'rtasidagi bog'lanishni ifodalaydi va (1)-formulalar ixtiyoriy haqiqiy son uchun o'rinli bo'lib, ulardan biz

$$w = \cos z, \quad w = \sin z$$

funksiyalarni aniqlashda foydalanamiz.

Ta'rif. Ushbu

$$\begin{cases} \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \\ tgz = \dfrac{\sin z}{\cos z} = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}, \\ ctgz = \dfrac{\cos z}{\sin z} = \dfrac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}} \end{cases} \qquad (2)$$

tengliklar yordamida aniqlangan funksiyalarga kompleks argumentli trigonometrik funksiyalar deb ataladi.

Trigonometrik funksiyalarning asosiy xossalarini keltiramiz.

1) $\cos z$ va $\sin z$ funksiyalar C kompleks tekislikda golomorf va ularning hosilalari

$$(\cos z)' = -\sin z,$$

$$(\sin z)' = \cos z$$

bo'ladi.

2) tgz funksiya

$$\left\{ z \in C; \quad z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \, k \in Z \right\}$$

to'plamda, ctgz funksiya esa

$$\{ z \in C; \quad , \, z \neq k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \}$$

to'plamda golomorf bo'ladi.

3) sinz, tgz, ctgz funksiyalar toq, cosz esa juft funksiya bo'ladi.

4) Trinogometrik funksiyalar davriy bo'lib, cosz va sinz ning davri 2π ga, tgz va ctgz ning davri π ga tengdir.

5) Haqiqiy o'zgaruvchili trigonometrik funksiyalar orasidagi munosabatlarni ifodalovchi formulalarning ko'pchiligi kompleks o'zgaruvchili bo'lgan holda ham o'rinli bo'ladi.

Izoh. Kompleks argumentli cosz va sinz funksiyalarning haqiqiy argumentli cosz va sinz funksiyalardan farqli tomoni shundaki, ular chegaralangan bo'lishi shart emas. Masalan $w = \cos z$ funksiyaning kompleks tekslik C da chegaranlanmaganligini ko'rsataylik,

◃ Ma'lumki,

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Bu tenglikda $z = iy$ deb olamiz. Unda

$$\cos(iy) = \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2}$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = \infty$$

Bu esa $w = \cos z$ funksiyaning C da chegaralanmaganligini bildiradi ▹

6) Ushbu

$$cos(iz) = chz\ , \quad isinz = -shz\ ,$$
$$cosz = ch(iz), \quad sinz = -ish(iz)$$

munosabatlar o'rinli, bunda

$$ch\,z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \quad sh\,z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}. \quad (3)$$

Odatda, (3)-funksiyalar giperbolik funksiyalar deyiladi.

7) Trigonometrik funksiyalar yordamida bajariladigan akslantirishlar bir nechta bizga ma'lum akslantirishlarning kompozitsiyasi natijasidan iborat bo'ladi.

1-Misol. Ushbu

$$w = \sin z$$

funksiya yordamida bajariladigan akslantirish (z) tekisligidagi

$$D = \{z \in C : -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z > 0\}$$

sohani (yarim yo'lakni) (w) tekislikdagi qanday sohaga akslantiradi?

Berilgan $w = \sin z$ funksiya yordamida bajariladigan akslantirish bizga ma'lum bo'lgan

$$w_1 = iz \ , \quad w_2 = e^{w_1} \ , \quad w_3 = \frac{w_2}{i}$$

akslantirishlar kompozitsiyasidan iborat bo'lib,

$$w = \sin z = \frac{1}{2}(w_3 + \frac{1}{w_3})$$

bo'ladi. Binobarin, bu akslantirishlarni, ketma-ket bajarish natijasida $w = \sin z$ uchun $w(D)$ topiladi:

1) D soha $w_1 = iz$ akslantirish natijada

$$D_1 = \{w_1 \in C : \operatorname{Re} w_1 < 0\ , \qquad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} w_1 < \frac{\pi}{2}\}$$

sohaga o'tadi.

2) D_1 soha $w_2 = e^{w_1}$ akslantirish natijasida

$$D_2 = \{w_2 \in C : |w_2| < 1\ , \qquad -\frac{\pi}{2} < \arg w_2 < \frac{\pi}{2}\}$$

yarim doiraga o'tadi.

3) D_2 soha $w_3 = \dfrac{w_2}{i}$ akslantirish natijasida

$$D_3 = \{w_3 \in C : |w_3| < 1\ , \qquad \pi < \arg w_3 < 2\pi\}$$

sohaga o'tadi.

4) D_3 soha $w = \sin z = \dfrac{1}{2}(w_3 + \dfrac{1}{w_3})$ akslantirish natijasida

$$w(D) = \{w \in C : \operatorname{Im} w > 0\}$$

sohaga o'tadi.

Demak, $w = \sin z$ akslantirish (z) takislikdagi

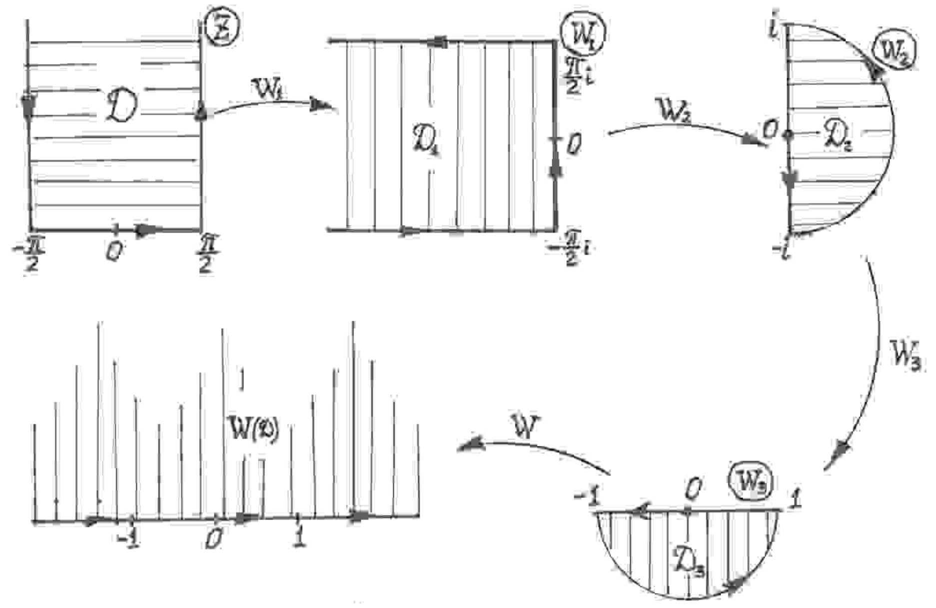
$$D = \{z \in C : -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}\ , \operatorname{Im} z > 0\}$$

sohani (w) tekislikdagi

$$w(D) = \{w \in C : \operatorname{Im} w > 0\}$$

yuqori yarim tekislikka akslantirar ekan.

Olingan funksiyalar D sohani qaysi yo'l bilan $w(D)$ sohaga akslantirishi 9-chizmada ko'rsatilgan



2-Misol: arctgx ni logarifmik funksiya orqali ifodalang.

Yechish. $tg\varphi = \frac{sin\varphi}{cos\varphi} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}$ ni hosil qilamiz. $tg\varphi = x$ bo'lsin. U holda

$$\frac{1}{i} \cdot \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}} = \frac{e^{i\varphi} - \frac{1}{e^{i\varphi}}}{i(e^{i\varphi} + \frac{1}{e^{i\varphi}})} = x \Rightarrow \frac{e^{2i\varphi} - 1}{i(e^{2i\varphi} + 1)} = x, \ \ xi(e^{2i\varphi} + 1) = e^{2i\varphi} - 1, \ e^{2i\varphi}(1 - ix) = 1 + ix, \ \ e^{2i\varphi} = \frac{1 + ix}{1 - ix}$$

$$\log_e e^{2i\varphi} = \log_e \frac{1 + ix}{1 - ix}, \ \ 2i\varphi = \ln \frac{1 + ix}{1 - ix}, \ \ \varphi = \frac{1}{2\varphi} \ln \frac{1 + ix}{1 - ix}$$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Shabat B.V. Vvedenie v kompleksno'y analiz. 2-nashri, 1-q.-M.,"Nauka", 1976.
2. Sattorov Ermamat Norqulovich Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi (amaliy mashg'ulotlar). O'quv qo'llanma. –Samarqand: SamDU, 2021
3. Sadullaev A., Xudoybergangov G., Mansurov X., Vorisov A., Tuychiev T. Matematik analiz kursidan misol va masalalar to'plami. 3-qism (kompleks analiz).- T., "O'zbekiston", 2000.
4. Volkovo'skiy L.I., Luns G.L., Aramanovich I.G. Sbornik zadach po teorii funksiy kompleksnogo peremennogo. 3-nashri. – M. "Nauka", 1975.
5. Yevgrafov M.A., Bejanov K.A., Sidorov Yu.V., Fedoryuk M.V., Shabunin M.I. Sbornik zadach po teorii analiticheskix funksiy, 2-nashri. –M., "Nauka" 1972.