Ayniyat yordamida tengsizliklarni isbotlash

A.Ibragimov
O.Pulatov
pulatov.sertifikat@gmail.com
B.Sag‘dullayeva
O’zbekiston-Finlandiya pedagogika instituti

Annotatsiya: Tengsizlikni isbotlashning ko’plab usullari mavjud. Biz ushbu maqolada o’quvchilarga bir ajoyib ayniyat va uning qo’llanishiga doir bazi malumotlarni taqdim etamiz.

Kalit so’zlar: tenglama, tengsizlik, uchburchak

Proving inequalities by means of facts

A.Ibrahimov
O.Pulatov
pulatov.sertifikat@gmail.com
B.Sagdullayeva
Uzbekistan-Finland Pedagogical Institute

Abstract: There are many ways to prove inequality. In this article, we will present to the readers an amazing phenomenon and some information about its application.

Keywords: equation, inequality, triangle

Lemma. Agar a,b,c lar haqiqiy sonlar bo’lsa u holda ular uchun

$$(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)\cdot abc \quad (1)$$

Tenglik o’rinli bo’ladi.

Isbot. (1) ning isboti tenglikning ikkala tarafdagi barcha qavslarini ochib yuborishdan bevosita osongina kelib chiqadi.

1-natija. Agar a,b,c$\in$R va abc=1 bo’lsa u holda $(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)\cdot 1$ bo’ladi.

2-natija. Agar a,b,c$\in$R va $(ab+bc+ca)$=1 bo’lsa u holda $(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)$-abc bo’ladi.

Quyida yuqoridagi ayniyatning qo’llanishiga doir masalalar yechamiz.

1. Agar a,b,c lar manfiy haqiqiy sonlar bo’lsin u holda $(a+b)(b+c)(c+a)=\geq\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ac)$ tengsizlik o’rinli ekanligini isbotlang.

Isbot. O'rta-arifmetik va o'rta geometrik miqdorlar orasidagi munosabatdan foydalansak

$$\frac{1}{9}(a+b+c)(ab+bc+ac)-abc \geq \frac{1}{9}\cdot 3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt{a^2\cdot b^2\cdot c^2}-abc=0$$ ga ya'ni[1]

$$\frac{1}{9}(a+b+c)(ab+bc+ac)-abc \geq 0$$ ga ega bo'lamiz. Lemmadagi (1) tengsizlikdan foydalanamiz

$$\frac{1}{9}(a+b+c)(ab+bc+ac)-abc \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{9}(a+b+c)(ab+bc+ac)+$$

$$(a+b)(b+c)(c+a)-(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 0 \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = \geq \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ac)$$

shuni isbotlash talab qilingan edi.

2. (Rumniya Matematika Olimpiadasi 2005).Agar musbat a,b,c sonlar $(a+b)(b+c)(c+a)=1$ tenglikni qanoatlantirsa u holda $(ab+bc+ac) \leq \frac{3}{4}$ tengsizlik o'rinli ekanligini isbotlang.

Isbot. O'rta arifmetik va o'rta geometrik miqdorlar orasidagi munosabatdan foydalanib,

$$a+b+c=\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}}=\frac{3}{2}$$

$a+b+c \geq \frac{3}{2}$ (2) va $a\cdot b\cdot c=\sqrt{a\cdot b}\cdot\sqrt{b\cdot c}\cdot\sqrt{a\cdot c} \leq \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}=\frac{1}{8}$

$a\cdot b\cdot c \leq \frac{1}{8}$ (3) tengsilikni hosil qilamiz endi lemmadagi (1) tenglik va yuqoridagi (2),(3) tengsizliklardan foydlanamiz.

$$(a+b)(b+c)(c+a)=1 = (a+b+c)(ab+bc+ac)-abc \geq \frac{3}{2}(ab+bc+ca)-\frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$1 \geq \frac{3}{2}(ab+bc+ac) - \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{3}{4} \geq (ab+bc+ac)$$

Shuni isbotlash talab qilingan edi.

3. Agar musbat a,b,c sonlar abc=1 tenglik qanotlantirsa u holda $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2(a+b+c)$ tengsizlizlik o'rinli ekanligini isbotlang.

Isbot. 1-natijadan foydalansak masala shartida berilgan tengsizlikning $(a+b+c)(ab+bc+ac-2) \geq 3$ ga ekvivalent ekanligini topamiz. Buni isbotlash uchun esa o'rta arrifmetik va o'rta geometrik miqdorlar asosidagi munosaatalardan foydalanamiz.

$$(a+b+c)(ab+bc+ac-2) \geq 3\sqrt[3]{abc}\left(3\sqrt[3]{abc}-2\right)=3(3-2) \Leftrightarrow$$

$(a+b+c)(ab+bc+ac-2) \geq 3$ shuni isbotlash talab qilingan edi.

[1] Курбон Останов, Ойбек Улашевич Пулатов, Джумаев Максуд, «Обучение умениям доказать при изучении курса алгебры,» *Достижения науки и образования,* т. 2 (24), № 24, pp. 52-53, 2018.

4. Ixtiyoriy ABC uchburchak uchun $\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$ tengsizlik o'rinli ekanini isbotlang.

Isbot: a= $tg\frac{A}{2}$ b= $tg\frac{B}{2}$ c= $tg\frac{C}{2}$ deb almashtirsak bo'ladi yani a= $tg\frac{A}{2}$ b= $tg\frac{B}{2}$ c= $tg\frac{C}{2}$ lar uchun

$tg\frac{A}{2}\,tg\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}\,tg\frac{C}{2}+tg\frac{C}{2}\,tg\frac{A}{2}$ =1 tenglik o'rinli ekanligidan yuqori almashtirishni bajarishga haqqimiz bor.

$\sin 2x=\frac{2tgx}{1+tg^2x}$ ayniyatni o'rinli bo'lganligi uchun (4) tengsizlik

$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}\le\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ga (5) teng kuchli bo'ladi.

$1+a^2=a^2+ab+bc+ac=(a+b)(a+c)$

$1+b^2=b^2+ab+bc+ac=(a+b)(a+c)$[2]

$1+c^2=c^2+ab+bc+ac=(a+c)(b+c)$ tenglikning o'rinli ekanligidan (5) ning

$\frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{b}{(a+b)(a+c)}+\frac{c}{(a+c)(b+c)}\le\frac{3\sqrt{3}}{4}$ tengsizlikk ekvivalent ekanligini topamiz.

Oxirgi tengsizlikda kasrlarni umumiy maxrajga ketirib o'shash hadlarni ixchamlaasak u

$(a+b)(b+c)(a+c)\ge\frac{8\sqrt{3}}{9}$ (6) kabi ko'rinishga keladi.Endi biz (6) ni isbotlashimiz kerak.

O'rta-arifmetik va o'rta geometrik miqdorlar orasidagi munosabatdan foydalanamiz.

$1=ab+bc+ac\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\Leftrightarrow abc\le\frac{\sqrt{3}}{9}$

$(a+b+c)\ge\sqrt{3(ab+bc+ac)}=\sqrt{3}\Leftrightarrow a+b+c\ge\sqrt{3}$

Endi 2-natija hamda (*),(**) tengsizliklardan foydalanib (6) tengsizlikni keltirib chiqaramiz.

$(a+b)(b+c)(a+c)=a+b+c-abc\ge\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{9}=\frac{8\sqrt{3}}{9}\Leftrightarrow(a+b)(b+c)(a+c)\ge\frac{8\sqrt{3}}{9}$

[2] Курбон Останов, Ойбек Улашевич Пулатов, Алижон Ахмадович Азимов, «Вопросы науки и образования,» *Использование нестандартных исследовательских задач в процессе обучения геометрии,* т. 1, № 13, pp. 120-121, 2018.

Shuni isbotlash talab qilingan edi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. A.V.Pogorelov, Analitik geometriya., T.O’qituvchi,, 1983 y.

2. Курбон Останов, Ойбек Улашевич Пулатов, Джумаев Максуд, «Обучение умениям доказать при изучении курса алгебры,» Достижения науки и образования, т. 2 (24), № 24, pp. 52-53, 2018.

3. Rajabov F.,Nurmatov A.,Analitik, geometriya va chizikli algebra, T.O’qituvchi, 1990y.

4. OU Pulatov, MM Djumayev, «In volume 11, of Eurasian Journal of Physics,,» Development Of Students’ Creative Skills in Solving Some Algebraic Problems Using Surface Formulas of Geometric Shapes, т. 11, № 1, pp. 22-28, 2022/10/22.

5. Курбон Останов, Ойбек Улашевич Пулатов, Алижон Ахмадович Азимов, «Вопросы науки и образования,» Использование нестандартных исследовательских задач в процессе обучения геометрии, т. 1, № 13, pp. 120-121, 2018.

6. АА Азимзода, ОУ Пулатов, К Остонов, «Актуальные научные исследования и разработки,» МЕТОДИКА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МЕТРИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ ТРЕУГОЛЬНИКА, т. 1, № 3, pp. 297-300, 2017.

7. OU Pulatov, HS Aktamov, MA Muhammadiyeva, «Development of Creative Skills of Students in Solution of Some Problems of Vectoral, Mixed and Double Multiplications of Vectors,» Eurasian Research Bulletin, т. 14, № https://www.geniusjournals.org/index.php/erb/article/view/2659, pp. 224-228, 2022/11/24.